



Rafael Galeth
COLEGIO VIRTUAL INTENSIVO PCEI

2do Matemáticas

Bachillerato

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministro de Gestión Educativa
Wilson Rosalino Ortega Mafla

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Roqueline Arguelles
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 1
Bachillerato primer curso

Antonio Garrido González
Dirección general

José Luis Gómez Cutillas
Dirección editorial

José Francisco Vilchez Román
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé
© grupo edebé, 2008
Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com



ISBN 978-9978-71-992-3
Primera impresión: julio 2016
Este libro fue evaluado por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el 30 de mayo de 2016.

© Ministerio de Educación del Ecuador, 2016
Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

La reproducción parcial o total de esta publicación, en cualquier forma y por cualquier medio mecánico o electrónico, está permitida siempre y cuando sea autorizada por los editores y se cite correctamente la fuente.



Ministerio
de Educación

ADVERTENCIA

Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Ministerio
de Educación



República
del Ecuador

Esta obra es un extracto de título e ISBN 978-9978-71-992-3 del libro del Ministerio de Educación.
Todos los derechos le pertenecen al autor.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

SGUNDO DE BACHILLERATO

UNIDAD 1

- 6 Concepto de función-Propiedades de las funciones
- 16 Operaciones con funciones
- 23 Progresiones geométricas
- 23 Término general de una progresión geométrica

UNIDAD 2

- 27 Gráfica de la curva trigonométrica seno-Gráfica de la curva trigonométrica coseno
- 31 Gráfica de la curva trigonométrica tangente 2.4. Gráfica de la curva trigonométrica cosecante
- 33 Gráfica de la curva trigonométrica secante
- 34 Gráfica de la curva trigonométrica cotangente

UNIDAD 3

- 36 La idea intuitiva de límite – Estimación numérica
- 38 Derivada de una función – notaciones - definición
- 39 Cálculo de la derivada de una función mediante la definición de límites.
- 40 La derivada y algunas de sus reglas básicas en funciones polinomiales.

UNIDAD 4

- 43 Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen
- 45 Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k)
- 51 Medidas de tendencia central para datos no agrupados
- 59 Medidas de tendencia central para datos agrupados

UNIDAD 1

CONTENIDO:

- Concepto de función-Propiedades de las funciones
- Operaciones con funciones
- Progresiones geométricas
- Término general de una progresión geométrica

I. FUNCIÓN

1.1. Concepto de función

En las actividades de nuestro diario vivir, nos encontramos frente a diferentes situaciones tales como cancelar el valor de compra de nuestros víveres, que depende de la cantidad de artículos que compramos; o que el valor a pagar del recorrido en taxi dependerá de la distancia del viaje; o el costo de realizar una llamada telefónica dependerá de factores como la duración, la región o el país donde nos vamos a comunicar.

En todas las circunstancias mencionadas se concibe una relación de correspondencia en la que intervienen números.

Sin embargo, hay situaciones en las cuales las relaciones de dependencia no vinculan un valor numérico, como por ejemplo, la asignación del lugar de destino de viaje a cada pasajero, o el sector de sufragio de cada ciudadano.

Llamamos función f del conjunto A en el conjunto B a una relación de dependencia en la que a cada elemento x de A le corresponde un único elemento y de B.

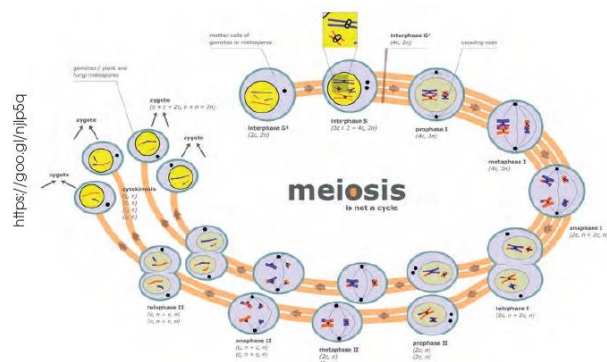
Se simboliza mediante la notación:

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Además, una de las notaciones más utilizadas es: $y = f(x)$

Que se lee «y es igual a f de x», esta notación no significa « f multiplicado por x», sino que es una manera de indicar que y corresponde a x.



Prohibida su reproducción

Expresión analítica de una función

Al conjunto A se le llama conjunto de salida y al conjunto B, conjunto de llegada.

Si un elemento x del conjunto A se corresponde con un elemento y del conjunto B, decimos que y es la imagen de x por la función f , o que x es una antiimagen de y por la función f .

En la figura se representa una función mediante diagramas de Venn.

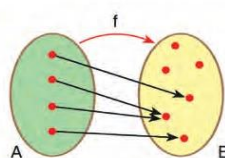


Fig. 1.

Observa que todos los elementos de A tienen una única imagen, pero que no todos los elementos de B han de tener antiimagen, ni esta ha de ser única.

Una función se puede interpretar mediante una expresión matemática que permite calcular las imágenes de los elementos del conjunto de salida y las antiimágenes de los elementos del conjunto de llegada.

Esta expresión matemática se convierte en una «fórmula» que se deriva del lenguaje algebraico; por ejemplo, considerando la situación de función en los números reales, al asignar a cada número real el triple del cuadrado de un número aumentado en 5. Es posible definir la función.

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5$$

Cálculo de imágenes

En la función anterior $f : x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5$

Para calcular la imagen respectiva de cualquier elemento x del conjunto de salida, basta con sustituir el valor considerado para x .

Si $x = -1$; $f(-1) = 3(-1)^2 - 5 = -2$

Así, -2 es la imagen de -1 .

Escribiremos: $f(-1) = -2$

1. Considerando las siguientes funciones, calcula sus respectivas imágenes para $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \sqrt{2}$

- a. $f : x \mapsto f(x) = 4x^2 + 2$
- b. $g : x \mapsto g(x) = -2x^2 + 2$
- c. $h : x \mapsto h(x) = \sqrt{2} - 2x^2$

Y TAMBIÉN: ¿?

Lenguaje matemático

Las funciones suelen representarse por las letras f , g , h ...

Y TAMBIÉN: ¿?

Variable independiente y variable dependiente

En la expresión:

$$y = f(x)$$

- A x se le llama variable independiente.
- A y se le llama variable dependiente.

Cálculo de antiimágenes

Para calcular la antiimagen o las antiimágenes de cualquier elemento y del conjunto de llegada, debemos reemplazar, esta vez, el valor considerado para y.

Ejemplo 1

En la función: $f: x \rightarrow f(x) = 3x^2 - 5$, Si $y = 4$, tenemos que:

$$4 = 3x^2 - 5 \quad \text{Reemplazamos de } y = 4$$

$$9 = 3x^2 \quad \text{Transponemos } -5$$

$$\frac{9}{3} = x^2 \quad \text{Dividimos para 3.}$$

$$\sqrt{\frac{9}{3}} = |x|$$

$$\pm \sqrt{3} = x$$

Luego $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ son las antiimágenes de 4

$$\text{Escribiremos: } f^{-1}(4) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

Y TAMBIÉN



Gottfried W. Leibniz

Matemático alemán (1646-1716).

Miembro fundador, entre otras, de la Academia de Ciencias de Berlín. A él se debe el término función, así como buena parte de la notación que hoy en día utilizamos en el estudio de las funciones.

<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/leibniz.htm>

Ejemplo 2

Escribimos la expresión analítica de la función f que asigna a cada número real el triple de su cuadrado, disminuido en una unidad.

• Calculamos la imagen de 1 por f .

• Calculamos las antiimágenes de -4 por f .

La expresión analítica de la función es: $f(x) = 3x^2 - 1$.

• Para calcular la imagen de $x = 1$ sustituimos x por 1 en la expresión analítica de $f: f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 2$

• Para calcular las antiimágenes de $y = -4$ debemos sustituir $y = f(x)$ por -4 y despejar x en la expresión $f(x) = 3x^2 - 1$.

Se tiene:

$$-4 = 3x^2 - 1 \Rightarrow 3x^2 = -3$$

$$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow |x| = \sqrt{-1}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Luego, -4 no tiene ninguna antiimagen real. Escribiremos: $f^{-1}(-4) = \emptyset$

2. Sean las funciones siguientes, determina las antiimágenes para -1, 0, 1, $\sqrt{2}$.

a. $f: x \rightarrow f(x) = 2x^2 - 2$ b. $f: x \rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4x^2$

Actividades

Gráfica de una función

Dada una función f , se dice que el dominio de f son todos aquellos valores de x para los cuales está definida la función. Por tanto para cada elemento de x que pertenece a ese dominio, podemos considerar al par (x, y) , donde $y = f(x)$. Se simboliza como: $D(f)$

Observa los ejes de coordenadas de la figura. Representamos en el eje de abscisas el conjunto de valores de x , y en el eje de ordenadas, el conjunto de valores de $y = f(x)$.

La gráfica de una función f es la representación en unos ejes de coordenadas de todos los pares de la forma $(x, f(x))$, siendo x un elemento del dominio de f .

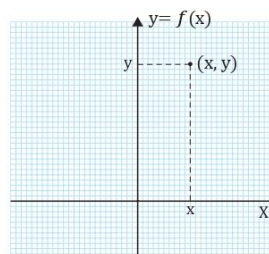


Fig. 2.

En la práctica, no es posible representar todos los pares $(x, f(x))$, ya que, en general, son infinitos. Por ello, se suelen representar unos cuantos puntos significativos y trazar el resto de la gráfica según las propiedades de la función.

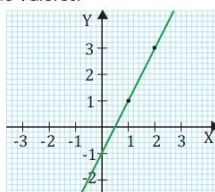
Ejemplo 3

Representamos gráficamente la función $f : x \rightarrow f(x) = 2x - 1$.

Construimos una tabla con varios pares de valores:

x	0	1	2
y = f (x)	-1	1	3
(x, f(x))	(0,-1); (1,1); (2, 3)		

Al representar estos pares de valores en unos ejes de coordenadas, se obtienen puntos alineados



Asimismo, la gráfica de una función permite hallar fácilmente sus imágenes y antiimágenes.

Ejemplo 4

Sea f la función representada en la figura. Hallemos:

- La imagen por f de $x = -2$ y $x = 2$.
- Las antiimágenes por f de $y = -1$ e $y = 1$.

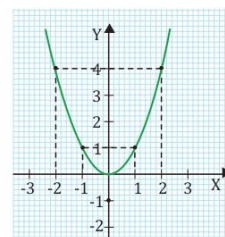
Resolvemos:

- Los puntos de la gráfica de abscisas -2 y 2 tienen ordenada 4 . Luego:

$$f(-2) = 4; f(2) = 4$$

- No existe ningún punto de la gráfica de ordenada -1 , mientras que hay dos puntos de ordenada 1 cuyas abscisas son -1 y 1 . Luego:

$$f^{-1}(-1) = \emptyset; f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$$



Y TAMBIÉN: ¿?

Al representar gráficamente una función no siempre se obtiene un trazo continuo. En estos casos debemos indicar si los puntos donde el trazo se interrumpe pertenecen o no a la gráfica. Observa:

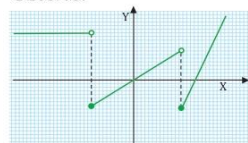


Fig. 3.
Los puntos señalados con el símbolo $\bullet$ pertenecen a la gráfica de la función.
Los puntos señalados con el símbolo $\circ$ no pertenecen a la gráfica de la función.

- Representa gráficamente las siguientes funciones:

- $f : x \rightarrow f(x) = -2$
- $f : x \rightarrow f(x) = -2x + 5$
- $f : x \rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 3$

Actividades

Prohibida su reproducción

Y TAMBIÉN:

La siguiente gráfica no representa ninguna función, puesto que a un elemento del dominio le corresponde más de una imagen.

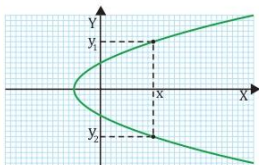


Fig. 4.

Una gráfica representa una función si y sólo si cualquier recta vertical corta a la gráfica, como máximo, en un punto.

x	-1	0	3
f(x)	0	1	2
(x, f(x))	(-1, 0)	(0, 1)	(3, 2)

Tabla 1.

Determinación gráfica del dominio y el recorrido

Dada una función f , se dice que su recorrido son todos los valores definidos de "y" para los cuales le corresponde, a cada uno de ellos, un valor de x determinado que pertenece a su dominio. Se simboliza como: $R(f)$

Para determinar el dominio y el recorrido de una función a partir de su gráfica, nos fijaremos en todos los pares de números reales de la forma (x, y) representados.

- Un número real $x = a$ es del dominio de una función si y sólo si la recta vertical $x = a$ corta a la gráfica en un punto.
- Un número real $y = b$ es del recorrido de una función si y sólo si la recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica en al menos un punto.

Ejemplo 5

Hallar el dominio y el recorrido de la función $f: x \rightarrow f(x) = \sqrt{x+1}$ y representarla gráficamente.

- Determinemos el dominio y el recorrido a partir de la gráfica y comprueba que coinciden con los hallados previamente.

Para que la imagen de x por la función f sea un número real, es necesario que el radicando sea positivo o cero, es decir, $x+1 \geq 0$. Por tanto, el dominio es:

$$D(f) = [-1, +\infty)$$

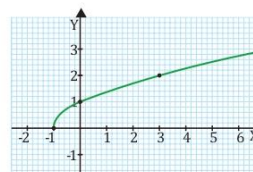
Sólo son imágenes por la función los números reales positivos o cero, es decir, $y \geq 0$. Por tanto, el recorrido es:

$$R(f) = [0, +\infty)$$

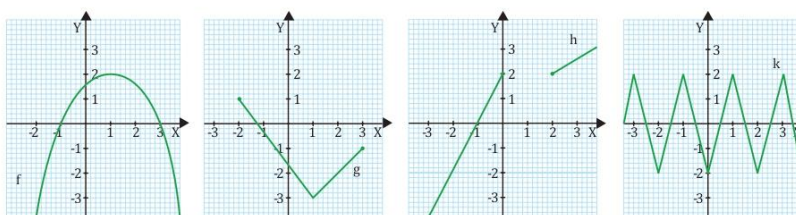
Para representar gráficamente la función, construimos una tabla con unos cuantos pares de valores:

Al representar estos pares de valores en unos ejes de coordenadas, obtenemos diversos puntos del plano situados sobre un arco de parábola.

Observa que una recta vertical $x = a$ corta a la gráfica si $a \geq -1$, y una recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica si $b \geq 0$. Luego, el dominio y el recorrido coinciden con los hallados previamente.



4. Determina el dominio y el recorrido de cada una de las funciones siguientes a partir de su gráfica.



Prohibida su reproducción

Actividades

1.2. Tipos de funciones

Veamos a continuación algunas características de las funciones que podemos extraer a partir de la observación de su gráfica.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Observa en la figura 5 las gráficas de $g: x \rightarrow g(x) = x^2$ y $h: x \rightarrow h(x) = 2x$:

- Podemos trazar al menos una recta horizontal sobre la gráfica de la función g que la intercepte en más de un punto.

Así, si consideramos la recta horizontal $y = 4$, vemos que existen dos elementos diferentes del dominio de g , $x = -2$ y $x = 2$, que tienen la misma imagen, $g(x) = 4$.

- Cualquier recta horizontal que tracemos sobre la gráfica de la función h la intercepta como máximo en un punto.

Así, sea cual sea la recta horizontal que consideremos, vemos que no existen elementos diferentes del dominio de h que tengan la misma imagen.

Una función $f: A \rightarrow B$ es **inyectiva** si dos elementos distintos cualesquiera de su dominio tienen imágenes distintas por f , es decir, si se cumple:

$$\forall x_1, x_2 \in A; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Luego h es inyectiva, mientras que g no lo es.

Considera de nuevo las funciones representadas en la figura 5:

- El recorrido de g es el conjunto de los números reales mayores o iguales que cero, es decir, $R(g) = [0, +\infty)$.
- El recorrido de h es el conjunto de todos los números reales, es decir, $R(h) = \mathbb{R}$.

Una función $f: A \rightarrow B$ es **sobreyectiva** si su recorrido coincide con el conjunto de llegada B :

$$R(f) = B$$

Observa en la figura 5 que, si la función es sobreyectiva, cualquier recta horizontal que consideremos corta a la gráfica al menos en un punto.

Así, h es sobreyectiva, mientras que g no lo es.

Una función es **biyectiva** si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

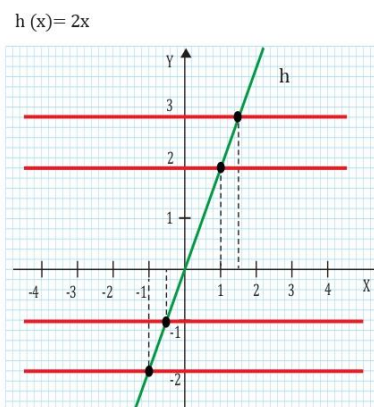
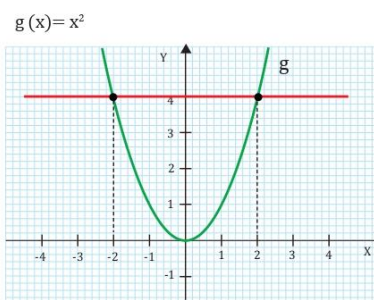


Fig. 5.

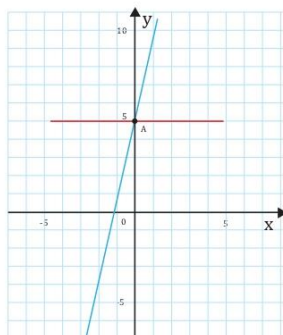


Fig. 6.

x	$f(x) = 4x + 5$	$(x, f(x))$
:	:	:
-1	1	(-1,1)
0	5	(0,5)
1	9	(1,9)
:	:	:

Tabla 1.

- Tabla de valores de la función $y = 4x + 5$

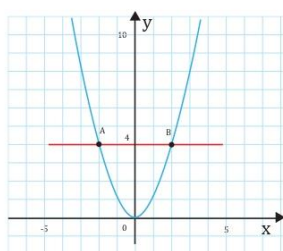


Fig. 7.

x	$f(x) = x^2$	$(x, f(x))$
:	:	:
-2	4	(-2,4)
0	0	(0,0)
2	4	(2,4)
:	:	:

Tabla 2.

- Tabla de valores de la función $y = x^2$

Análisis de la tabla de valores

Es un conjunto de valores registrados en una tabla, los mismos que determinan la relación entre dos conjuntos o más, pero que, de manera usual para el estudio de las funciones, utilizaremos únicamente tres columnas de datos.

Recordando el principio de inyectividad, tenemos que:

$$\text{Si } x_1 \neq x_2 \text{ entonces } f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D(f)$$

Es decir, al tomar dos valores diferentes de la columna x (conjunto de partida) registrados en la tabla, los valores respectivos que se obtienen según la columna $(y = 4x + 5)$, sus respectivas imágenes deben ser diferentes.

Así entonces podemos determinar si una función es inyectiva de forma numérica.

Según los datos de la tabla para la función $y = 4x + 5$, podemos observar que, al considerar los valores para x , las imágenes obtenidas son diferentes:

$$f(-1) = 1; f(0) = 5 \text{ y que } f(1) = 6$$

Por lo que se verifica que la función correspondiente es inyectiva.

Mientras que al analizar los valores de la función $y = x^2$, observamos que: $f(-2) = 4; f(0) = 0$ y que $f(2) = 4$

Las imágenes para $x = -2$ y $x = 2$ son iguales, por lo que se puede concluir que la función $y = x^2$ no es inyectiva.

5. Verifica si las siguientes funciones son inyectivas, utilizando el análisis algebraico, gráfico y de tabla de valores.

a. $g: x \rightarrow g(x) = 5x + \frac{1}{2}$ d. $f: x \rightarrow f(x) = x^2 + 1$

b. $f: x \rightarrow f(x) = -4x^2 + 6$ e. $f: x \rightarrow f(x) = 4x - 1$

c. $h: x \rightarrow h(x) = \sqrt{x} - 3$ f. $f: x \rightarrow f(x) = 3x - 2$

Actividades

Prohibida su reproducción

1.3. Función sobreyectiva

Análisis algebraico

Una función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva si cada elemento de B es imagen de algún elemento del dominio. Es decir, f es sobreyectiva si $\text{Rec}(f) = B$; Rec equivale a recorrido.

Debemos tomar en cuenta además que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$, tiene como dominio y codominio los números reales.

Ejemplo 6

Si tenemos la función $f: x \mapsto f(x) = -x + 7$, determinamos si es sobreyectiva.

$y = -x + 7$ Función Dato
 $x = -y + 7$ Se resuelve para x

Se tiene que el recorrido de $f: x \mapsto f(x) = \mathbb{R}$, por ende, la función es sobreyectiva.

Análisis de la tabla de valores

Revisando las tablas respectivas para las funciones:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}; A \subseteq \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = x^3$ y $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$

En la primera tabla que aparece, observamos que todos los valores del casillero de las imágenes pertenecen al conjunto de llegada, por lo que se determina que la función es sobreyectiva.

En cambio, en la segunda tabla si se revisan los valores, es posible observar que para los valores negativos de x , las imágenes respectivas no se encuentran definidas.

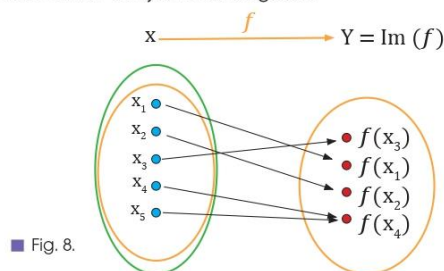
Por lo tanto, la función $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ no es sobreyectiva.

Análisis gráfico en diagrama sagital

Una función $f: X \rightarrow Y$ es una función **sobreyectiva** si:

$$\text{Im}(f) = Y$$

Esto significa que todo elemento $y \in Y$ es la imagen de al menos un elemento $x \in A$. Es decir, el recorrido de f coincide con el conjunto de llegada.



x	$f(x) = x^3$	$(x, f(x))$
:	:	:
-1	1	(-1,1)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	8	(2,8)
:	:	:

■ Tabla 3.

■ Tabla de valores de la función $y = x^3$

x	$f(x) = \sqrt{x}$	$(x, f(x))$
:	:	:
-1	no def.	no def.
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	1,4142	(2,1.4)
3	1,732	(3,1.7)
:	:	:

■ Tabla 4.

■ Tabla de valores de la función $y = \sqrt{x}$

Prohibida su reproducción

Análisis Gráfico

Gráficamente, podemos determinar si una función es sobreyectiva cuando al determinar el recorrido de forma gráfica, este debe coincidir con el conjunto de llegada en la función propuesta.

Si consideramos la función: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2 + 2$

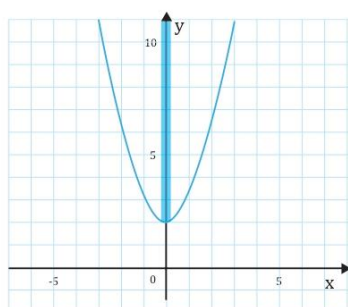
Observamos que el conjunto inicial de f es $\mathbb{R}$, además que el conjunto de llegada de f es: $\mathbb{R}$.

En la gráfica de la función f definida por $f: x \mapsto f(x) = x^2 + 2$, al determinar el recorrido de manera gráfica, tenemos que la imagen de la función f es $[2, \infty)$.

De modo que podemos concluir que el recorrido de la función no coincide con el conjunto final de f ; entonces concluiremos que: $f(x) = x^2 + 2$ no es sobreyectiva.

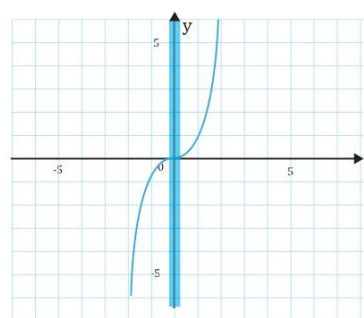
Ahora bien, analizando la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3$, podemos concluir rápidamente que la función es sobreyectiva, debido a que el conjunto del recorrido coincide con el conjunto final.

Gráfica de la función



■ Fig. 9.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = x^2 + 2$
 $\text{Rec}(f) = [2, +\infty[$
 f no es sobreyectiva

Gráfica de la función



■ Fig. 10.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = x^3$
 $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$
 f si es sobreyectiva

Prohibida su reproducción

6. Analiza la inyectividad y sobreyectividad de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, utilizando los métodos algebraico, gráfico y de análisis de valores.

- a. $f: x \mapsto f(x) = 4x^3 - 2$ b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x+4}$ c. $f: x \mapsto f(x) = -4x + \frac{3}{4}$

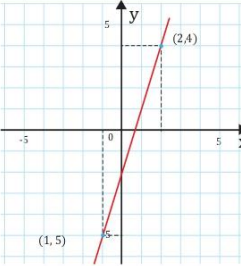
Actividades

1.4. Función biyectiva

Si una función f es **sobreyectiva** y a la vez **inyectiva**, entonces es **biyectiva**.

Ejemplo 7

Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 3x - 2$, determinemos si es biyectiva.

Análisis algebraico	Análisis numérico	Análisis gráfico														
$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$ $3x_1 - 2 + 2 = 3x_2$ $3x_1 = 3x_2$ $\frac{3x_1}{3} = \frac{3x_2}{3}$ $x_1 = x_2$	<table><tr><th>x</th><th>$f(x) = 3x - 2$</th></tr><tr><td>:</td><td>:</td></tr><tr><td>-1</td><td>-5</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>:</td><td>:</td></tr></table>	x	$f(x) = 3x - 2$	:	:	-1	-5	0	-2	1	1	2	4	:	:	
x	$f(x) = 3x - 2$															
:	:															
-1	-5															
0	-2															
1	1															
2	4															
:	:															
Por lo tanto f es inyectiva	Las imágenes obtenidas son diferentes, por lo tanto f es inyectiva.	Se observa que el recorrido coincide con el conjunto de salida, además es inyectiva.														

■ Tabla 5

Según el análisis, podemos concluir que la función es biyectiva.

Si una función no es inyectiva, no es necesario analizar su sobreyectividad para determinar si es biyectiva, o también, si no es sobreyectiva tampoco será necesario verificar la inyectividad para determinar su biyectividad.

Una función no biyectiva puede ser inyectiva o sobreyectiva, o bien, ninguna de las dos.

7. Dadas las funciones, realiza la representación gráfica y determina si son biyectivas analizando el criterio algebraico, numérico y gráfico.

a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = -5x^2 + 10$$

b. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = -3x - 4$$

c. $f: A \rightarrow \mathbb{R}; A \subseteq \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x + 5} + 2$$

Actividades

Prohibida su reproducción

1.5. Operaciones con funciones

En el conjunto de las funciones reales de variable real, podemos definir diversas operaciones.

Adición	Sustracción
La función suma de f y g es la función que asigna a cada número real x la suma de las imágenes por la función f y por la función g : $f + g : x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$	La función diferencia de f y g es la función que asigna a cada número real x la diferencia de las imágenes por la función f y por la función g : $f - g : x \rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Multiplicación	División
La función producto de f y g es la función que asigna a cada número real x el producto de las imágenes por la función f y por la función g : $f \cdot g : x \rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	La función cociente de f y g es la función que asigna a cada número real x el cociente de las imágenes por la función f y por la función g : $\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} ; g(x) \neq 0$

■ Tabla 6

Ejemplo 8

Dadas las siguientes funciones: $h: x \mapsto h(x) = -x^2 + 2x + 3$; $g: x \mapsto g(x) = 4x^2 - 5x + 2$. Calculemos: a. $g + h$; b. $(g + h)(2)$; c. $g - h$; d. $(g - h)(-3)$

a. $g + h : x \mapsto (g + h)(x) = g(x) + h(x)$

$$= 4x^2 - 5x + 2 + (-x^2 + 2x + 3)$$

$$= 3x^2 - 3x + 5$$

$$= 3x^2 - 3x + 5$$

Reemplazamos las funciones h y g

Resolvemos los paréntesis y reducimos términos.

Expresión resultante.

b. Ahora es posible hallar el valor numérico de $(g + h)(2)$

$$g + h : x \mapsto (g + h)(2) = 3(2)^2 - 3(2) + 5$$

$$= 12 - 6 + 5$$

$$= 11$$

Reemplazamos $x = 2$

Resolvemos la potencia, el producto y la suma

Encontramos el valor numérico respectivo

c. Mediante un proceso análogo, tendremos:

$$g - h : x \mapsto (g - h)(x) = g(x) - h(x)$$

$$= 4x^2 - 5x + 2 - (-x^2 + 2x + 3)$$

$$= 4x^2 - 5x + 2 + x^2 - 2x - 3$$

$$= 5x^2 - 7x - 1$$

$$= 5x^2 - 7x - 1$$

Reemplazamos las funciones h y g

Reducimos términos.

Expresión resultante.

d. Calculamos el valor numérico.

$$g - h : x \mapsto (g - h)(-3) = 5(-3)^2 - 7(-3) - 1$$

$$= 65$$

Reemplazamos $x = -3$

Resolvemos la potencia, el producto y la suma

Encontramos el valor numérico respectivo

Prohibida su reproducción

Ejemplo 9

Dadas las siguientes funciones: $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - x}$; $g: x \mapsto g(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}$. Calcular:

a. $f \cdot g: x \mapsto (f \cdot g)(x)$; b. $f \cdot g: x \mapsto (f \cdot g)(4)$; c. $\frac{f}{g}: x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x)$; d. $\frac{f}{g}: x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(2)$

a. $f \cdot g: x \mapsto (f \cdot g)(x)$
 $= (\sqrt{x^2 - x}) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)$ Reemplazamos las funciones f y g

$= \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{4}$ **Expresión resultante**

b. Valor numérico de $(f \cdot g)(4)$

$= \left(\frac{\sqrt{4^3 - 4^2}}{4}\right)$ Reemplazamos $x = 4$
 $= \left(\frac{\sqrt{64 - 16}}{4}\right)$ Resolvemos las potencias.
 $= \left(\frac{\sqrt{48}}{4}\right)$ Resolvemos la diferencia.
 $= \left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right)$ Simplificamos el radical
 $= \sqrt{3}$ Simplificando la fracción

c. $\frac{f}{g}: x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$= \frac{\sqrt{x^2 - x}}{\frac{\sqrt{x}}{4}}$ Reemplazamos las funciones f y g
 $= \frac{4\sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x}}$ Realizamos el producto de medios y extremos
 $= \frac{4\sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x}}$ Simplificamos la expresión
 $= 4\sqrt{x - 1}$

d. Calculamos el valor numérico.

$\frac{f}{g}: x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(2) = 4\sqrt{(2) - 1}$ Reemplazamos las funciones f y g
 $= 4\sqrt{1}$ Resolvemos la potencia y la diferencia
 $= 4$

Actividades

8. Dadas las siguientes funciones: $h: x \mapsto h(x) = -\sqrt{x}$; $g: x \mapsto g(x) = 4x^2 + \frac{1}{2}$; $f: x \mapsto f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}$ suponiendo que $f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0$. Calcula.

a. $h + g$

c. $h + 2g$

e. $h + 2g$

g. $\frac{h}{f}$

i. $\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(2)$

b. $h \cdot g$

d. $f + g + h$

f. $g + f$

h. $\frac{h \cdot g}{f}$

j. $\left(\frac{h}{g} + h\right)(4)$

Dominio resultante de las operaciones con funciones

Cuando se combinan las funciones a través de las operaciones indicadas anteriormente, se producen nuevas funciones cuyo dominio también es diferente para el inicial en cada uno de las funciones, debido que al combinarse una función con otra, el dominio resultante será la intersección de los dominios de las funciones que intervienen en la operación.

Así entonces, según la tabla:

	Operación	Dominio
Adición	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$
Diferencia	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$\text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$
Producto	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$

■ Tabla 7

1. Dadas las funciones: $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x-2}$; $g: x \mapsto g(x) = \frac{1}{x+3}$

Dominio de f

Sea $f(x) = \sqrt{x-2}$

Por la propiedad de los radicales tenemos:

$$x - 2 \geq 0 \quad \text{por lo que } x \geq 2$$

Entonces :

$$\text{Dom}(f) = [2; \infty)$$

Determinamos el dominio de g

Sea $g(x) = \frac{1}{x+3}$

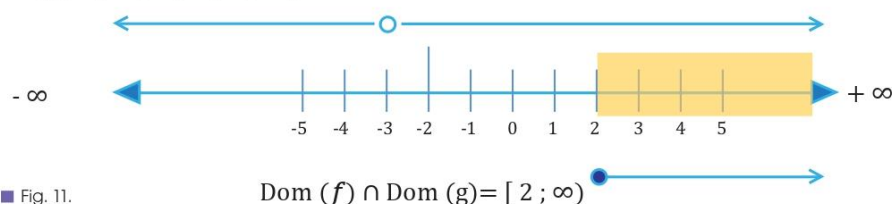
Por la propiedad de las fracciones tenemos:

$$x + 3 \neq 0 \quad \text{por lo que } x \neq -3$$

Entonces :

$$\text{Dom}(g) = (-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$$

Prohibida su reproducción



■ Fig. 11.

Composición de funciones

Podemos definir otra operación, diferente a las anteriores, llamada composición de funciones.

Considera las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$, y un número real, por ejemplo, $x = 2$. Podemos calcular la imagen de 2 en f , con lo que obtenemos $f(2) = 5$, y a continuación, hallar la imagen de 5 en g , es decir, $g(5) = g(f(2)) = 24$.

$$\text{Sea: } x = 2 \rightarrow f(2) = 5 \rightarrow g(f(2)) = 24$$

En general, dadas dos funciones f y g , la función que asigna a cada x el valor $g(f(x))$ se denomina **función compuesta** de f y g , y se escribe $g \circ f$.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{g \circ f} \\ x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x)) \end{array} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Para resolver ejercicios de composición de funciones se debe considerar que si se escribe $(f \circ g)(x)$, la función g ingresa a la función f , es decir, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Ejemplo 10

1. Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x^2}; g(x) = \frac{x}{4}$$

Calculamos a. $(f \circ g)(x)$ y b. $(g \circ f)(x)$

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{x}{4} \right)^2} \right)$$

$$= \left| \frac{x}{4} \right|$$

La función g "ingresa" a f .

b. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$= \frac{\sqrt{x^2}}{4}$$

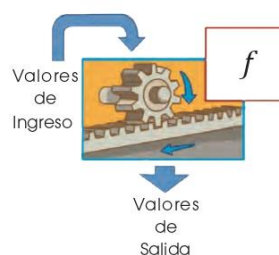
La función f "ingresa" a g .

■ Tabla 8

Concluimos que la función compuesta no cumple con la **propiedad conmutativa**; $f \circ g \neq g \circ f$.

Y TAMBIÉN: ¿?

- La función compuesta de f y g se escribe invirtiendo el orden, $g \circ f$, para que coincida con el de la expresión $g(f(x))$.
- La notación $g \circ f$ se lee g compuesta con f .



■ Fig. 12.

Prohibida su reproducción

Introducción

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales: $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Sucesión de Fibonacci

La sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

en la que cada término, excepto los dos primeros, se halla sumando los dos términos inmediatamente anteriores se encuentra en numerosos elementos de la naturaleza.

Así, la disposición de las hojas alrededor del tallo en algunas plantas o la colocación de las semillas en la flor del girasol se produce según los términos de esta sucesión.

Esta sucesión es conocida como sucesión de Fibonacci, por ser este matemático italiano el primero en describirla.



<http://goo.gl/cSE99R>

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una **progresión aritmética** (o por diferencia) es una sucesión de términos de tal manera que, para obtener el siguiente término a partir del anterior, aumentamos un mismo número que puede ser positivo o negativo, al que se llama diferencia (d).

Término n -ésimo

Es el último término considerado en una progresión. La expresión que permite calcularlo es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Una progresión aritmética se determina totalmente si se conocen los componentes de la progresión, como son: primer término (a_1), diferencia (d) y el número de términos (n).

Así, en el ejemplo tenemos:



■ Fig. 14.

Primer término: $(a_1) = 32$

Diferencia: $(d) = 6$

Último término: $(a_n) = 56$

Número de términos: $(n) = 5$

Ejemplo 14

Progresión	n	a_1	d	a_n
...1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,...	7	1	2	13
...-100, -200, -300,...	3	-100	-100	-300
... $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$,...	5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
... $x + 1$, $3x + 5$, $5x + 9$,...	3	$x + 1$	$2x + 4$	$5x + 9$

■ Tabla 12

Las progresiones aritméticas pueden ser **crecientes** o **decrecientes**, dependiendo de la **constante (diferencia)** con la que se realice la progresión.

Y TAMBIÉN: ?

Ley de Titius-Bode

Es una sucesión con la cual se predijo en 1766 la existencia de un cuerpo celeste entre la órbita de Marte y Júpiter; ahora conocido como Ceres.

<https://goo.gl/ec9dHG>

TIC



En el siguiente portal web podrás encontrar algunos ejemplos de cómo se aplican las progresiones aritméticas en la vida diaria.

Visita:

<http://goo.gl/HpC7Vy>

Prohibida su reproducción

Término general de una progresión aritmética

La fórmula del término general de una progresión aritmética (a_0) se encuentra sin más que observar que:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

Nótese que en todos los casos, el término correspondiente es la suma de dos cantidades:

- La primera es siempre a_1
- La segunda es el producto $(n - 1) d$

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

Y TAMBIÉN: ¿?

¿Cómo hallar la diferencia?

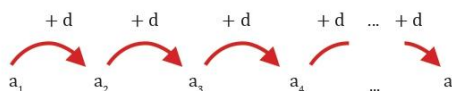
Se encuentra la diferencia entre el término consecuente y antecedente.



Intuitivamente al pensar en una progresión, a la vista salta la idea de que es una serie de «cosas» que son ordenadas de forma ascendente o descendente y que tienen cierta característica o características en común.

Ejemplo 15

Todos los términos de una progresión aritmética pueden obtenerse a partir del primer término y de la diferencia.



Ejemplo 16

1. Determinemos el 25.º término de $0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \dots$

Primera idea: Calculamos la diferencia de la progresión.

$$d = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{1}{3}$$

Segunda idea: El 25.º término coincide con el último término, por lo tanto $n = 25$.

Por lo que tendremos:

$$a_1 = 0; d = \frac{1}{3}; n = 25; a_n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$a_n = 0 + (25 - 1) \frac{1}{3}$$

$$a_n = 24 \frac{1}{3}$$

$$a_n = 8$$

2. Determinemos el 35.º término de los múltiplos de 3.

Primera idea: Calculamos la diferencia de la progresión.

Al ser múltiplo de 3, la diferencia será 3.

Segunda idea: El 35.º término coincide con el último término, por lo tanto $n = 35$.

Por lo que tendremos:

$$a_1 = 3; d = 3; n = 35; a_n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$a_n = 3 + (35 - 1) 3 \quad \text{Reemplazamos los datos.}$$

$$a_n = 3 + (34) 3 \quad \text{Resolvemos la diferencia.}$$

$$a_n = 3 + 112 \quad \text{Resolvemos el producto.}$$

$$a_n = 115 \quad \text{Resolvemos la suma.}$$

Suma de los términos de una progresión aritmética

En varios ejercicios numéricos de progresiones, es posible determinar la suma de los términos de manera directa, por ejemplo en la progresión:

,..., 4, 6, 8, 10

La suma de los términos será: 28

Pero existirán algunas progresiones cuyo número de términos sea mucho mayor, por ello, para calcular la suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética, podemos calcular mediante las expresiones:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Esta expresión se utilizará cuando en los datos se disponga del número de términos (n), del primer término (a_1) y del último término (a_n).

■ Tabla 13

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1) d]$$

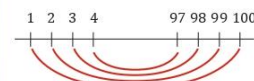
En cambio, en esta expresión se debe disponer del número de términos (n), del primer término (a_1) y de la diferencia de la progresión (d).

■ Tabla 14

Y TAMBIÉN: ¿?

Según la tradición, el problema de hallar el valor de la suma de los cien primeros números naturales fue planteado en 1787 por un profesor a su clase de niños de diez años, para mantenerlos ocupados un buen rato. En esa clase se encontraba el que fue llamado «príncipe de las matemáticas», el alemán Carl F. Gauss.

Gauss observó que si sumaba el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y, así sucesivamente, obtenía siempre el mismo resultado.



■ Fig. 15.

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

...

Así, dedujo que la suma de los cien primeros números naturales es:

$$101 \cdot 50 = 5050$$

12. Determina el n - término, según corresponda.

- a. 9no término de 7, 10, 13, ...
- b. 25vo término de -6, -3, 0, ...
- c. 11vo término de $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \dots$
- d. 29vo término de -1, -4, -7, ...

13. En cada una de las progresiones siguientes, halla la suma del número de términos que se indica

- a. 3, 6, 9, ... ($n = 11$)
- b. 6, 4, 6, 3, 2, ... ($n = 15$)
- c. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$ ($n = 21$)
- d. $x - y, x, x + y, \dots$ ($n = 6$)

14. Determina el n - término, según corresponda

- a. 7.º término de 7, 10, 13, ...
- b. 15.º término de -6, -3, 0, ...
- c. 21.º término de $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \dots$

d. Una progresión aritmética comienza por 2, termina por 3 y su diferencia es $\frac{1}{10}$. ¿Cuántos términos hay en la progresión?

15. En cada una de las progresiones siguientes halla la suma del número de términos que se indica

- a. $x, x + y, x + 2y, \dots$ ($n = 6$)
- b. 4, 8, 12, ... ($n = 10$)
- c. 8, 4, 0, ... ($n = 15$)
- d. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$ ($n = 15$)

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Considera la sucesión: 3, 6, 12, 24, 48, ...

Si calculamos el cociente entre cada uno de los términos y su anterior, excepto el primero, obtenemos siempre el mismo resultado:

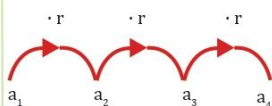
$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \dots = 2$$

Diremos que esta sucesión es una progresión geométrica de razón 2.

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que el cociente entre un término cualquiera, excepto el primero, y su anterior es una cantidad constante. Esta cantidad constante se llama **razón** de la progresión y se representa por r .

Y TAMBIÉN:

En una progresión geométrica se cumple que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por la razón de la progresión.



■ Fig. 16.

Para determinar la razón en una progresión geométrica dada, se utiliza el cociente, debido a que es el proceso inverso del producto, entre el término consecuente y precedente.

3.1. Término general de una progresión geométrica

En una progresión geométrica podemos obtener todos los términos a partir del primer término y de la razón. Observa:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = (a_1 \cdot r^2) \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\ a_5 &= a_4 \cdot r = (a_1 \cdot r^3) \cdot r = a_1 \cdot r^4 \end{aligned}$$

Cada término de la progresión se obtiene multiplicando el primer término por la razón elevada al número que indica el lugar que ocupa dicho término, disminuido en una unidad.

Por tanto, la expresión de un término cualquiera a_n es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Prohibida su reproducción

Ejemplo 17

1. ¿Cuál es la razón de la progresión? 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...

Construimos dos términos adicionales

Determinamos la razón entre 1 y 3. $r = \frac{1}{3}$

Multiplicamos por el último término en la progresión y determinamos el cuarto término. $\frac{1}{9}$. Luego el quinto término. $\frac{1}{27}$

Resulta entonces:

$$3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$$

2. En la progresión geométrica:

$$5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$$

Determinemos la razón y el quinto término.

$$r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$$

Determinamos la razón entre $\frac{5}{4}$ y $\frac{5}{8}$

Resulta $r = \frac{1}{2}$, por lo que el quinto término se obtiene al multiplicar $\frac{5}{8}$ por $\frac{1}{2}$.

$$\text{Entonces } a_5 \text{ es } \frac{5}{16}$$

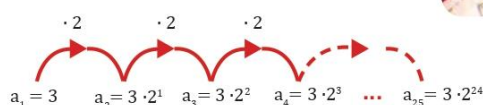
Obtención del término general

Una progresión geométrica queda completamente definida si conocemos el primer término y la razón, debido a que para obtener los siguientes términos, basta multiplicar el último término registrado, y para obtener los anteriores debemos dividir según lo explicamos en la sección anterior.

Supongamos que tenemos una progresión cuyo primer término sea 3 y su razón respectiva sea 2. Entonces ¿Cómo hallaríamos el término a_{25} ?

Ilustrando la situación tenemos:

razón = 2



■ Fig. 17.



<http://goo.gl/69Mxx>

■ Euclides. Precursor de las proporciones continuas

Para pasar del primer término (a_1) hasta (a_{25}), son necesarios 24 términos.

Para ir encontrando los siguientes términos, se deberá ir multiplicando por 2; aquello supone que tendremos entonces 2^{24} , debido a que es necesario obtener los 24 términos que ya mencionamos. Así entonces, podemos escribir:

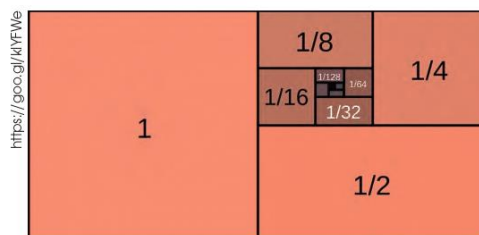
$$a_{25} = 3 \cdot 2^{24}, \quad a_{25} = 3 \cdot 16777217 = 50\,331\,648.$$

16. Halla la expresión del término general y el valor del término a_{20} de la siguiente sucesión.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ en caso de que sea una progresión geométrica.

17. Escribe los diez primeros términos de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$ y $a_5 = 2$.

Actividades



3.2 Suma de los n términos de una progresión geométrica

A continuación, deduciremos una expresión que nos permitirá obtener la suma de n términos de una progresión geométrica sin necesidad de calcularlos.

Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$ una progresión geométrica y representemos por S_n la suma de los n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

- Multiplicamos por r dicha expresión

$$\begin{aligned} r \cdot S_n &= r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + r \cdot a_4 + \dots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n \\ &= a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot r \end{aligned}$$

- Calculamos $r \cdot S_n - S_n$:

$$\begin{aligned} r \cdot S_n &= a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot r \\ - S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ \hline r \cdot S_n - S_n &= a_n \cdot r - a_1 \end{aligned}$$

- Sacamos factor común S_n y despejamos:

$$S_n(r-1) = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

Puesto que $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, S_n puede expresarse también como:

$$S_n = \frac{(a_1 \cdot r^{n-1}) \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

Por tanto, para sumar cualquier número de términos de una progresión geométrica, nos es suficiente con conocer a_1 y r .

Y TAMBIÉN:

Cuenta la leyenda que un poderoso rey tuvo un maestro de ajedrez al que estaba muy agradecido por haberle iniciado en este juego.

El rey ofreció al maestro una recompensa, y éste pidió todo el trigo que se pudiera reunir colocando un grano en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, y así sucesivamente hasta la casilla sesenta y cuatro del tablero de ajedrez.

El rey aceptó gustoso, pues pensaba que con un saco de trigo recompensaría al maestro.

Pero su gran sorpresa fue que, al contar los granos de trigo necesarios, se dio cuenta de que no había suficiente trigo en el país para recompensar al maestro. ¿Cómo era posible?

- Calcula las toneladas de trigo necesarias para recompensar al maestro, si consideramos que un grano de trigo pesa aproximadamente 0,0496 g.

Ejemplo 18

Hallemos la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = 3$ y $a_1 = 1$.

Aplicamos la fórmula $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

$$S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{1(3^6 - 1)}{3 - 1} = S_6 = 364$$

18. Calcula, la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 3$ y cuya razón es $r = 2$.

19. De una progresión geométrica se conoce $a_4 = 128$ y $r = 4$. Calcula la suma de los ocho primeros términos.

20. De una progresión geométrica se sabe que la suma de sus diez primeros términos es $S_{10} = 29524$ y su razón, $r = 3$. Halla el primer término.

21. De una progresión geométrica se conoce $r = 2$ y $a_8 = 768$. Halla la suma de los diez primeros términos.

UNIDAD 2

CONTENIDO:

- Gráfica de la curva trigonométrica seno-Gráfica de la curva trigonométrica coseno.
- Gráfica de la curva trigonométrica tangente-Gráfica de la curva trigonométrica cosecante.
- Gráfica de la curva trigonométrica secante.
- Gráfica de la curva trigonométrica cotangente.

2. LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los términos seno, coseno y tangente los hemos escuchado dentro del compendio formal de trigonometría, utilizándose los cocientes de cada función para resolver triángulos rectángulos.

En el eje horizontal, disponemos la **variable independiente (x)**, cuyos valores ingresados son medidas de ángulos, en radianes y en grados, para contribuir en la comprensión. Mientras que en el eje vertical, ubicamos los valores que se obtiene luego de ingresar los datos en la función, los mismos que son valores numéricos expresados en la forma **racionalizada**, que son elementos de la **variable dependiente (y)**.

2.1. Gráfica de la curva trigonométrica seno

Función seno

Veamos cómo podemos definir una función que asigne al valor de un ángulo, medido en radianes, el valor de, por ejemplo, su seno.

Observa la figura. Dado un ángulo α , el valor de su seno viene dado por la ordenada del punto P.

La función que asigna a la variable independiente x (x es α en radianes en la siguiente tabla) el valor $f(x) = \sin(x)$ se llama **función seno**.

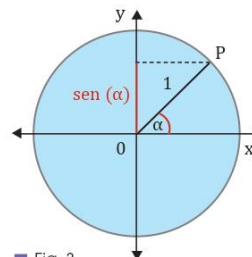


Fig. 3.

En esta ocasión, analizaremos las características particulares que presenta la función seno, definido por $f(x) = \sin x$, revisando la tabla de valores y representación gráfica en un período tomado desde 0 a 2π (0 a 360°).

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$(x, \sin(x))$	$\{(0,0); (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}); (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}); (\frac{\pi}{2}, 1); (\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}); (\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}); (\pi, 0); (\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}); (\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}); (\frac{3\pi}{2}, -1); (\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}); (\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}); (2\pi, 0)\}$												

Tabla 1.

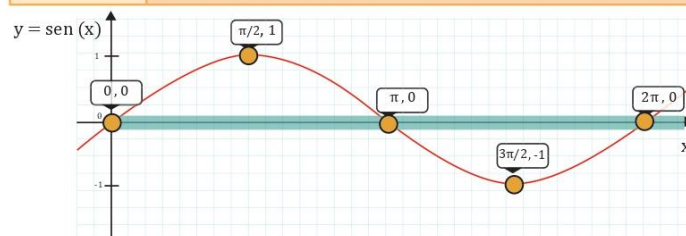


Fig. 4.

Una función f es **periódica de período T** si existe un número real positivo T tal que, para cualquier x del dominio de f , se verifica: $f(x + T) = f(x)$

Si T es un período de la función, también lo será un múltiplo cualquiera de T. Al mínimo valor de T que cumple la definición anterior se le llama **período fundamental**.

Las curvas trigonométricas tienen la particularidad de ser **funciones periódicas**, en la ilustración se muestra el análisis de un período horizontal (2π).

Características de la función trigonométrica seno

A continuación, describimos las características de la función, seno definido por $f(x) = \sin(x)$

$\text{sen} : x \mapsto f(x) = \sin(x)$
Dominio: Los números reales
Recorrido: $[-1; 1]$
Intersecciones con el eje horizontal x : $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$...
Intersecciones con el eje vertical y : $(0,0)$
Es una función continua.
La función es simétrica con respecto al origen.
No presente asíntotas.
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
Máximo relativo: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
Mínimo relativo: $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

■ Tabla 2.

Además de las características descritas, analizaremos los intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento) y concavidad en la siguiente tabla.

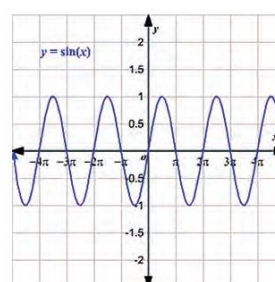
Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	Crece de 0 a 1	Cóncava hacia abajo
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	Decrece de 1 a 0	Cóncava hacia abajo
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	Decrece de 0 a -1	Cóncava hacia arriba
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	Crece de -1 a 0	Cóncava hacia arriba

■ Tabla 3.

La gráfica de la función $y = \sin(x)$, descrita en más de un período, que constituye una cima y un valle.

5. **Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, tres períodos de la función $\text{sen}: x \mapsto f(x) = \sin x$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.

Actividades



■ Fig. 5.

<http://goo.gl/SBc3e7>
Prohibida su reproducción

2.2. Gráfica de la curva trigonométrica coseno

A la función coseno se denota con $\cos$.

Examinemos ahora las características particulares que presenta la función coseno definido por $f(x) = \cos x$, indagando la tabla de valores y representación gráfica en un período tomado desde 0 a 2π (0 a 360°).

Función coseno

Vamos a definir ahora la función que asigna al valor de un ángulo, medido en radianes, el valor de su coseno.

Dado un ángulo α como el de la figura, el valor de su coseno viene dado por la abscisa del punto P.

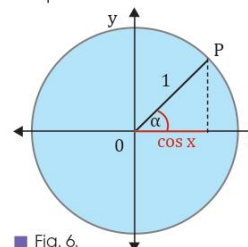


Fig. 6.

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$(x, \cos(x))$	$\{(0,1); (\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}); (\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}); (\frac{\pi}{2}, 0); (\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}); (\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}); (\pi, -1); (\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}); (\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}); (\frac{3\pi}{2}, 0); (\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}); (\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}); (2\pi, 1)\}$												

Representación gráfica de la función coseno en el intervalo $(0; 2\pi)$

Tabla 4.

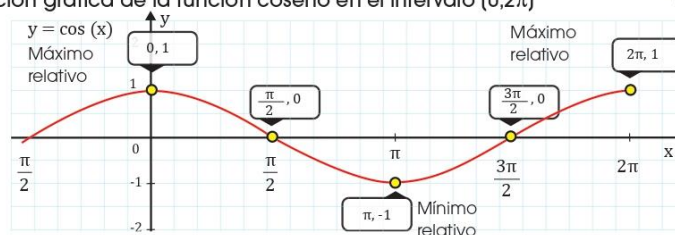


Fig. 7.

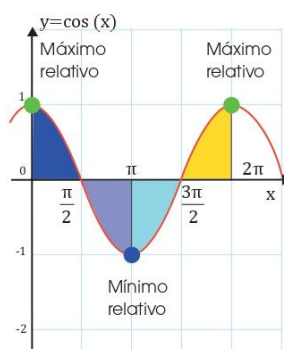


Fig. 8.

Características de la función trigonométrica coseno

$$\cos: x \mapsto f(x) = \cos(x)$$

Dominio: Los números reales

Recorrido: $[-1; 1]$

Intersecciones con el eje x: $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 0)$...

Intersecciones con el eje y: $(0, 1)$

Es una función continua.

La función es simétrica con respecto a la recta, $x=0$ o con respecto al eje y.

No presenta asíntotas.

No es una función inyectiva.

No es una función sobreyectiva.

Máximo relativo: $(0, 1)$ y $(2\pi, 1)$, ...

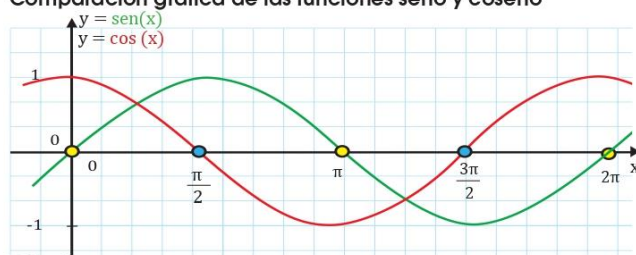
Mínimo relativo: $(\pi, -1)$, ...

Características de variación de la función trigonométrica coseno (crecimiento y decrecimiento) y concavidad

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	decrece de 1 a 0	Cóncava hacia abajo
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	Decrece de 0 a -1	Cóncava hacia arriba
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	Crece de -1 a 0	Cóncava hacia arriba
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	Crece de 0 a 1	Cóncava hacia abajo

■ Tabla 6.

Comparación gráfica de las funciones seno y coseno



■ Fig. 9.

— sen
— cos

	Seno	Coseno
Dominio	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
Recorrido	$y \in [-1, 1]$	$y \in [-1, 1]$
Intersección eje X	$(0,0); (\pi,0); (2\pi,0), \dots$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \dots$
Intersección eje Y	$(0,0)$	$(0,1)$
Continuidad	Si es continua	Si es continua
Simetría	Respecto al origen	Respecto a la recta $x=0$ o con respecto al eje y
Asíntotas	No	No
Inyectividad	No	No
Sobreyectividad	No	No
Máximo relativo	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \dots$	$(0,1)$ y $(2\pi,1), \dots$
Mínimo relativo	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), \dots$	$(\pi,-1), \dots$
Intervalos de crecimiento	$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$x \in [\pi, 2\pi]$
Intervalos de decrecimiento	$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$	$x \in [0, \pi[$
Cóncava hacia arriba	$(\pi, 2\pi), \dots$	$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \dots$
Cóncava hacia abajo	$(0, \pi), \dots$	$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \dots$

■ Tabla 7.

Prohibida su reproducción

2.3. Gráfica de la curva trigonométrica tangente

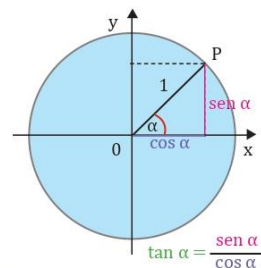
Analicemos las características exclusivas que presenta la función tangente, denotado por $\tan$ y definido por $f(x) = \tan x$, analizando la tabla de valores y representación gráfica en un período tomado desde 0 a 2π (0 a 360°).

Función tangente

Podemos definir también la función que asigna al valor de un ángulo, medido en radianes, el valor de su tangente.

Dado un ángulo α como el de la figura, el valor de su tangente viene dado por el cociente entre la ordenada y la abscisa del punto P.

La función que asigna a la variable independiente x (x es α en radianes en la siguiente tabla), el valor $f(x) = \tan(x)$ se llama **función tangente**.



■ Fig. 10.

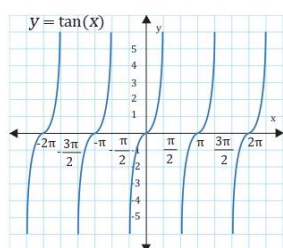
Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \tan x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	N.D.	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	N.D.	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$(x, \tan(x))$	$\{(0,1); (\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}); (\frac{\pi}{2}, \text{N.D.}); (\frac{2\pi}{3}, -\sqrt{3}); (\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}); (\pi, 0);$ $(\frac{7\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{4\pi}{3}, \sqrt{3}); (\frac{3\pi}{2}, \text{N.D.}); (\frac{5\pi}{3}, -\sqrt{3}); (\frac{11\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}); (2\pi, 0)\}$												

■ Tabla 8.



■ Recordemos que:
 $\tan \theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$

■ Fig. 11.



Prohibida su reproducción

64

■ Fig. 12.

Características de la función trigonométrica tangente en el intervalo $[0, 2\pi]$

$\tan: x \mapsto f(x) = \tan(x)$
Dominio: $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
Recorrido: Los reales
Intersecciones con el eje x: $(0, 0); (\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$
Intersecciones con el eje y: $(0, 0)$
Es una función continua en los reales salvo en los puntos en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al origen.
Presenta asíntotas en los puntos $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 0)$
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
No posee máximos ni mínimos relativos.
Es estrictamente creciente en todo su dominio.

■ Tabla 9.

2.4. Gráfica de la curva trigonométrica cosecante

La función cosecante es la razón trigonométrica inversa del seno y se simboliza como $\csc$ o cosec y se define $\csc: x \mapsto f(x) = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$; $\sin(x) \neq 0$. Veamos las características que presenta $f(x) = \csc x$, examinando la tabla de valores y su representación gráfica en un período que va desde 0 a 2π (0 a 360°)

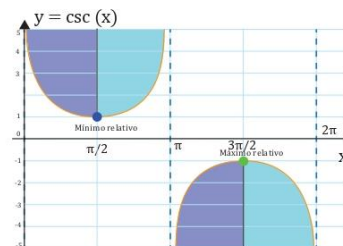
Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \csc(x)$	N.D	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	N.D	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	N.D
$(x, \csc(x))$	$\{(0, \text{N.D.}); (\frac{\pi}{6}, 2); (\frac{\pi}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}); (\frac{\pi}{2}, 1); (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}); (\frac{5\pi}{6}, 2); (\pi, \text{N.D.});$ $(\frac{7\pi}{6}, -2); (\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}); (\frac{3\pi}{2}, -1); (\frac{5\pi}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}); (\frac{11\pi}{6}, -2); (2\pi, \text{N.D.})\}$												

Características de la función trigonométrica cosecante en el intervalo $[0, 2\pi]$

■ Tabla 10.

$\csc: x \mapsto f(x) = \csc x$
Domino: $\mathbb{R} - \{n\pi\}$ con $n \in \mathbb{Z}$
Recorrido: $\mathbb{R} -]1, -1[$
No corta al eje X ni al eje Y
Intersecciones con el eje y: NO
Es una función continua en los reales salvo en los puntos en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al origen
Presenta asíntotas en los puntos $(0,0)$; $(\pi,0)$ y $(2\pi, 0)$
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
Máximos relativos: $x = \frac{3\pi}{2}$
Mínimos relativos: $x = \frac{\pi}{2}$

■ Tabla 11.



■ Fig. 13.

En la siguiente tabla se muestra las características de crecimiento, decrecimiento y concavidad de la función.

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	decrece de $+\infty$ a 1	Cóncava hacia arriba
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	crece de 1 a $+\infty$	Cóncava hacia arriba
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	crece de $-\infty$ a -1	Cóncava hacia abajo
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	decrece de -1 a $-\infty$	Cóncava hacia abajo

■ Tabla 12.

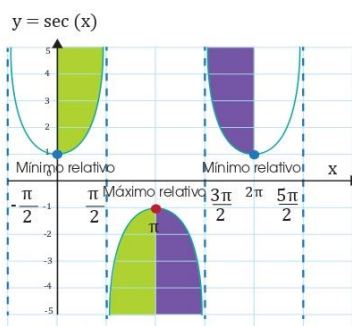
Prohibida su reproducción

2.5. Gráfica de la curva trigonométrica secante

Ahora, observemos las características que muestra la función secante, que se denota $\sec$, y se define: $\sec : x \mapsto f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$; $\cos(x) \neq 0$. Esta razón trigonométrica es inversa al coseno. Analicemos su tabla de valores y gráfica dentro del período indicado. (0 a 360°).

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \sec(x)$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	N.D.	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	N.D.	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$(x, \sec(x))$	$\{(0,1); (\frac{\pi}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}); (\frac{\pi}{3}, 2); (\frac{\pi}{2}, \text{N.D.}); (\frac{2\pi}{3}, -2); (\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}); (\pi, -1);$ $(\frac{7\pi}{6}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}); (\frac{4\pi}{3}, -2); (\frac{3\pi}{2}, \text{N.D.}); (\frac{5\pi}{3}, 2); (\frac{11\pi}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}); (2\pi, 1)\}$												

■ Tabla 13.



■ Fig. 14.

Análisis de la función secante en el en el intervalo $[0, 2\pi]$

Sec: $x \mapsto f(x) = \sec(x)$
Domino: $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
Recorrido: $\mathbb{R} -]-1, 1[$
No corta al eje X
Corta al eje Y en el punto $(0, 1)$
Es una función continua en los reales salvo en los punto en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al eje y
Presenta asíntotas en los puntos $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 0)$, ...
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
Máximos relativos: $x = \pi$
Mínimos relativos: $x = 0$ y $x = 2\pi$

■ Tabla 14.

Características de crecimiento, decrecimiento y concavidad de la función

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	crece de 1 a $+\infty$	Cóncava hacia arriba
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	crece de $-\infty$ a 1	Cóncava hacia abajo
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	decrece de -1 a $-\infty$	Cóncava hacia abajo
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	decrece de $+\infty$ a 1	Cóncava hacia arriba

■ Tabla 15.

2.6. Gráfica de la curva trigonométrica cotangente

Es la función trigonométrica inversa a la tangente se denota con $\cot$ y se define: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$; $\sin(x) \neq 0$. Observemos las características que presenta en relación a su representación gráfica y a su tabla de valores durante el periodo designado.

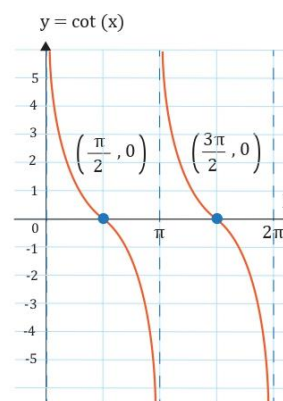
Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \cot(x)$	N.D	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	N.D	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	N.D
$(x, \cot(x))$	$\{(0, \text{N.D.}); (\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}); (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{\pi}{2}, 0); (\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{5\pi}{6}, -\sqrt{3}); (\pi, \text{N.D.});$ $(\frac{7\pi}{6}, \sqrt{3}); (\frac{4\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{3\pi}{2}, 0); (\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{11\pi}{6}, -\sqrt{3}); (2\pi, \text{N.D.})\}$												

Análisis de la función cotangente en el en el intervalo $[0, 2\pi]$

■ Tabla 16.

$\cot : x \mapsto f(x) = \cot(x)$
Dominio: $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$
Recorrido: $\mathbb{R}$
No corta al eje Y
Corta al eje X en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 0)$
Es una función continua en los reales salvo en los puntos en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al eje origen.
Presenta asíntotas en los puntos $(0, 0)$; $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$
No es una función inyectiva
No es una función sobreyectiva
No tienen máximos ni mínimos relativos
Es estrictamente decreciente en todo su dominio.

■ Tabla 17.



■ Fig. 15.

- Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, cuatro periodos de la función $\csc : x \mapsto f(x) = \csc(x)$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.
- Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, tres periodos de la función $f(x) = \sec x$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.
- Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, dos periodos de la función $\tan : x \mapsto f(x) = \tan x$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.
- Representa** gráficamente, sobre papel milimetrado, dos periodos de la función $\cot : x \mapsto f(x) = \cot(x)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.

Actividades

Prohibida su reproducción

UNIDAD 3

CONTENIDO:

- La idea intuitiva de límite – Estimación numérica,
- Derivada de una función – notaciones - definición
- Cálculo de la derivada de una función mediante la definición de límites.
- La derivada y algunas de sus reglas básicas en funciones polinomiales.



<http://goo.gl/PST9OC>

La idea intuitiva de límite

La noción de límite constituye uno de los conceptos importantes para introducirse al estudio del **cálculo**.

En nuestras actividades cotidianas, figuramos la noción de límite cuando en una competición automovilística se observan vehículos a punto de colisionar, o también en una grúa cuando estamos aproximadamente cerca de exceder su capacidad de carga, se dice que el equipo de **izaje** se encuentra al límite de su capacidad.

Ejemplo 1

Considerando la función: $f(x) = 2x + 1$, determinemos.

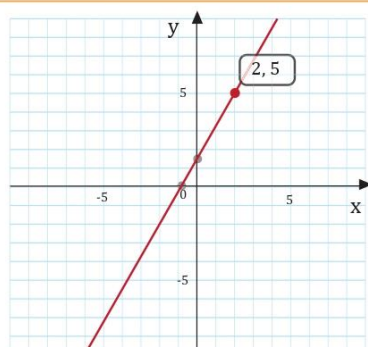
- La imagen de la función cuando $x = 2$.
- La imagen de la función cuando x está muy cercano (límite) a 2.

Para interpretar la situación del problema, realizamos el análisis de la tabla de valores, así como las respectivas representaciones gráficas.

a. Imagen cuando $x = 2$

Utilizamos valores enteros mayores y menores a 4.

x	...	0	1	2	3	4	...
f(x)	...	1	3	5	7	9	...

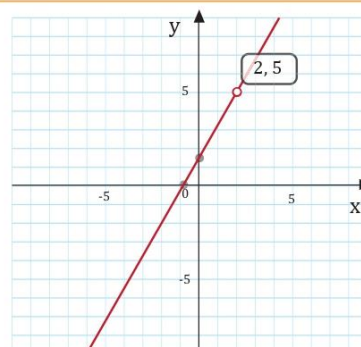


Observamos en la gráfica que cuando $x = 2$ entonces $f(x) = 5$.

b. Imagen cuando x se aproxima a 2

Utilizamos valores un tanto mayores y un tanto menores a 4.

x	...	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	...
f(x)	...	5,96	5,98	5,02	5,04	5,06	...



En el punto (2, 5), se observa un «agujero» (discontinuidad), que indica que a pesar de que x no puede ser igual a 2, se acerca mucho a 2, y entonces $f(x)$ se «proyecta» o se aproxima a 5. Utilizando límites, se denota: $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$

■ Tabla 1.

Estimación numérica de un límite

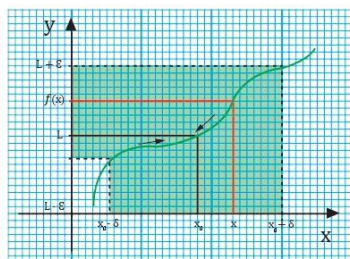


Fig. 1.

Un número real L es el límite de una función f cuando x tiende o se aproxima a x_0 si y solo si para cualquier número real positivo ϵ , por pequeño que sea, existe un número real positivo δ , tal que para todo $x \neq x_0$, si la distancia entre x y x_0 es menor que δ , entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ϵ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Ejemplo 2

Considerando la función:

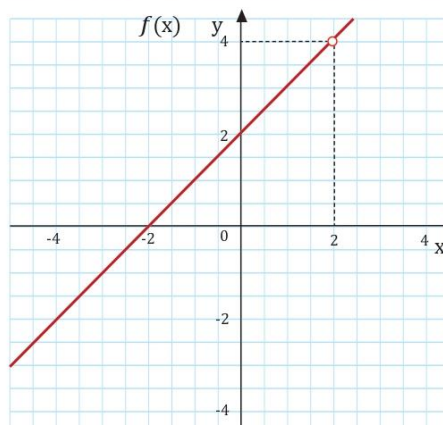
$$f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$$

Supongamos que es posible representar gráficamente la función f , pero es notable observar que cuando $x = 2$, la función no podría representarse, debido a que se anula el denominador.

Para observar el comportamiento de la función, generamos una tabla de valores que se aproximen a dos por la izquierda y por la derecha, es decir utilizamos valores un poco menores y un poco mayores que 2, como se ilustra en la siguiente tabla.

x	...	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	...
$f(x)$	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...

Como es notable, el límite de la función es 4, debido a que se acerca por la izquierda y por la derecha.



1. Considerando los siguientes límites, **completa** las tablas respectivas y **estima** el límite. **Compara** el resultado con la representación gráfica respectiva.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 6x)$

x	...	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	...
$f(x)$	...						...
$(x, f(x))$							

c. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \right)$

x	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...
$f(x)$	...						...
$(x, f(x))$							

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 6x}{x} \right)$

x	...	-0,1	-0,001	0,001	0,1	...
$f(x)$	...					...
$(x, f(x))$						

d. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 4} \right)$

x	...	-0,99	-0,98	1,01	1,02	...
$f(x)$	...					...
$(x, f(x))$						

Actividades

Prohibida su reproducción

Derivada de una función

La derivada de una función mide el cambio o la variación de una variable con respecto de otra.

Para intuir este concepto, observamos que la pendiente, o inclinación, de una carretera es la derivada de la altura respecto a la distancia horizontal.

La velocidad en módulo es la derivada de la distancia recorrida con respecto al tiempo.

Así, el odómetro de un automóvil, se lo puede interpretar como una máquina de derivar.

Definición de la derivada de una función

La derivada de $f'(x)$ de x está dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Al proceso de calcular la derivada de una función se denomina derivación.

Una función es derivable en x siempre y cuando su derivada en x exista, y además, también es derivable en un intervalo abierto siempre y cuando sea derivable para todos y cada uno de los elementos del conjunto determinado por el intervalo.

Una función derivable es continua pero el recíproco no se cumple.

Diferentes notaciones de la derivada de una función

Las formas más conocidas para expresar la derivada según:

Leibniz: El cociente $\frac{dy}{dx}$ se lee: «derivada de y con respecto a x ». Esta notación tiene la ventaja de sugerir a la derivada de una función con respecto a otra como un cociente de diferenciales.

Lagrange: La expresión $f'(x)$ se lee « f prima de x », es la notación más simple para diferenciación.

Euler: La expresión $D_x f$ se lee « d sub x de f ».



<http://goo.gl/R02ICx>



<http://goo.gl/Ci5H4y>

<http://goo.gl/LnfxMw>

<http://goo.gl/vMIMM9I>

Prohibida su reproducción

Cálculo de la derivada de una función mediante la definición de límites

En los procesos esenciales para obtener la derivada intervienen: productos notables, simplificación de expresiones semejantes y sustituciones numéricas; así tenemos:

Ejemplo No 1	Ejemplo No 2
Determinemos $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = 8x + 5$	Determinemos $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = -5x^2 - 3$
En cada variable x insertamos la adición de h ; luego restamos la función original.	
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8(x+h) + 5 - (8x + 5)}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5(x+h)^2 - 5 - (-5x - 3)}{h}$
Propiedad distributiva en los paréntesis.	Productos notables y propiedad distributiva en los paréntesis.
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8x + 8h + 5 - 8x - 5}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5x^2 - 10xh - 5h^2 - 3 + 5x + 3}{h}$
Reducimos términos semejantes	
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10xh - 5h^2}{h}$
Simplificamos h	Sacamos el factor común y simplificamos
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8\cancel{h}}{\cancel{h}}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}}$
Finalmente, calculamos el límite reemplazando h por 0	
$f'(x) = 8$	$f'(x) = -10x$

■ Tabla 2.

- Suponiendo que el movimiento de un cuerpo se interpreta según la ecuación: $y = 10t^2$, **determina** la velocidad media considerando los dos primeros segundos de caída.
- Suponiendo que el movimiento de un cuerpo se interpreta según la ecuación: $y = 3t^2 - 2$, **determina** la velocidad media considerando los cinco primeros segundos de caída.
- Determina** la derivada de las funciones utilizando la definición de la derivada.
 - $f: x \mapsto f(x) = -16x + 9$
 - $f: x \mapsto f(x) = 5x$
 - $f: x \mapsto f(x) = x^2 - x$
 - $f: x \mapsto f(x) = 4x^3 + 3x + 2$
 - $f: x \mapsto f(x) = x - 6x^2$

La derivada y algunas de sus reglas básicas en funciones polinomiales

A continuación se presentan algunas reglas básicas de la derivación, las cuales permitirán calcular las derivadas sin el uso de la definición de la derivada por límites.

Regla 1: Sea la función constante definida por: $f: x \mapsto f(x) = k$, donde k es constante. La derivada de una función constante es cero. $f'(x) = 0$.

Explica que al derivar una función constante, en general un número real, entonces la derivada es cero.

Hallamos las derivadas de:

- | | |
|---|-----------------------------|
| a. $f: x \mapsto f(x) = -5$ | entonces $f'(x) = 0$ |
| b. $f: x \mapsto f(x) = 9\pi c$ | entonces $f'(x) = 0$ |
| c. $\frac{d}{dx} \sqrt{5}$ | entonces $\frac{d}{dx} = 0$ |
| d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{5}$ | entonces $f'(x) = 0$ |

Regla 2: Sea la función definida por: $f: x \mapsto f(x) = x^n$. La derivada de esta función es $f'(x) = nx^{n-1}$. Cuando n es cualquier número real.

Explica que el exponente multiplica a la función y que la base x tiene una nueva potencia reducida en una unidad, con respecto a la función inicial.

Hallamos las derivadas de:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^3$ | entonces $f'(x) = -15x^2$ |
| b. $f: x \mapsto f(x) = 9x^5$ | entonces $f'(x) = 45x^4$ |
| c. $f: x \mapsto f(x) = -4x^{-2}$ | entonces $f'(x) = 8x^{-3}$ |

Regla 3: La derivada en la adición o sustracción. Siendo las funciones g y h diferenciables:

Expone que la derivada de la suma o la resta de funciones es la suma o diferencia de las derivadas independientes de cada función de manera independiente.

$$\text{sea } f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$\text{sea } u(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow u'(x) = g'(x) - h'(x)$$

Hallamos las derivadas de:

- | | |
|---|----------------------------------|
| a. $f: x \mapsto f(x) = x^3 + 8x^2$ | entonces $f'(x) = 3x^2 + 16x$ |
| b. $f: x \mapsto f(x) = 9x^5 + 12x^3$ | entonces $f'(x) = 45x^4 + 36x^2$ |
| c. $f: x \mapsto f(x) = -4x^{-2} - 15x$ | entonces $f'(x) = 8x^{-3} - 15$ |

Estudiaremos el resto de reglas en el curso superior, debido a que el propósito de explicar únicamente las reglas mencionadas es que el estudiante pueda verificar los resultados obtenidos en la diferenciación por límites.

5. **Deriva** las funciones utilizando las reglas de diferenciación básicas (reglas 1 a 3).

- | | |
|---|---|
| a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^2 + 8$ | d. $f: x \mapsto f(x) = -12x^2 + 8x + 15$ |
| b. $f: x \mapsto f(x) = -5\pi^3$ | e. $f: x \mapsto f(x) = -20x^2 + \sqrt{12}$ |
| c. $f: x \mapsto f(x) = -e^2 + \frac{3}{7}$ | f. $f: x \mapsto f(x) = \pi x + \sqrt{5}$ |

UNIDAD 4

CONTENIDO:

- Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen
- Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k)
- Medidas de tendencia central para datos no agrupados
- Medidas de tendencia central para datos agrupados

CÓNICAS

Y TAMBIÉN: ?

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que cumplen una determinada condición geométrica.



Circunferencia de centro C y radio r .

Fig. 1.

Si giramos una recta alrededor de un eje con el que tiene un punto en común, obtenemos una **superficie cónica de revolución**.

La intersección de una superficie cónica de revolución con un plano determina una familia de curvas que tienen una gran importancia en campos como la arquitectura o la ingeniería: las **cónicas**.

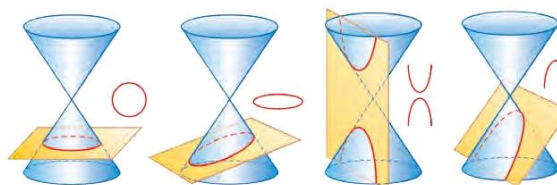


Fig. 2.

Observamos en la imagen que las cónicas varían en función de la inclinación del plano.

Una **cónica** es la curva que se obtiene como intersección de una superficie cónica de revolución y un plano.

Veamos a continuación cómo definir las cónicas como lugares geométricos del plano.

I. LA CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal forma que la distancia a un punto fijo permanece constante. El punto fijo se denomina centro de la circunferencia y la distancia fija, radio de la circunferencia (r).

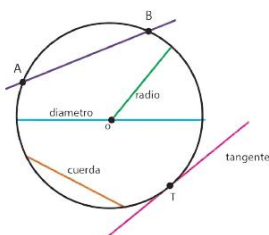


Fig. 3.

La **circunferencia** es el perímetro del círculo, que posee los siguientes componentes:

Centro: El punto interior equidistante a todos los puntos de la circunferencia.

Radio: Segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella. El radio se denota con la letra « r » o bien con sus puntos extremos, su medida es constante.

Cuerda: Segmento que une dos puntos de la circunferencia de manera interna.

Diámetro: Es la cuerda de mayor medida que pasa por el centro de la circunferencia. Lo denotamos mediante « d » y es el doble del radio ($2r$).

Tangente: Es la recta que interseca a solo un punto de la circunferencia.

Secante: Es la recta que corta a la circunferencia, intersectando dos puntos de ella.

1.1 Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen

Según la definición, se tiene que cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la circunferencia se encuentra a una distancia CP desde el centro, y a este segmento se le conoce como radio.

Aplicando la fórmula de distancia entre los puntos de un punto $P(x, y)$ al centro $C(h, k)$:

$$d = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

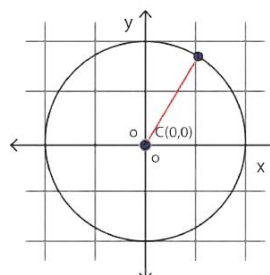
Se elimina la raíz: $d^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

Se sustituye d (distancia) por r (radio), porque $d = r$

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Reemplazamos en la fórmula las coordenadas $C(0,0)$ $r^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$

Ecuación canónica de la circunferencia $C(0,0)$: $r^2 = x^2 + y^2$



■ Fig. 4.

Ejemplo 1

Hallemos la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio = 4

$x^2 + y^2 = r^2$ Ecuación canónica de la circunferencia

$x^2 + y^2 = (4)^2$ Reemplazo de datos.

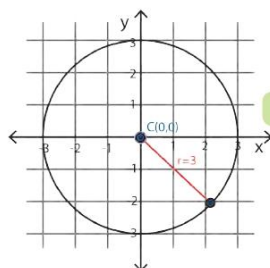
$$x^2 + y^2 = 16$$

Ejemplo 2

Determinemos la ecuación de la circunferencia a partir de la siguiente gráfica.

Ecuación canónica de la circunferencia

Datos: La gráfica Ecuación = ?



■ Fig. 5.

$x^2 + y^2 = r^2$ Ecuación canónica de la circunferencia

$x^2 + y^2 = (3)^2$ Reemplazo de datos.

$$x^2 + y^2 = 9$$

Ejemplo 3

Considerando la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ determinemos la gráfica de la circunferencia correspondiente.

Datos: $x^2 + y^2 = 4$ Gráfica = ?

Al comparar la ecuación dada en los datos con la ecuación general, es posible establecer la igualdad: $r^2 = 4$; entonces $r = 2$.

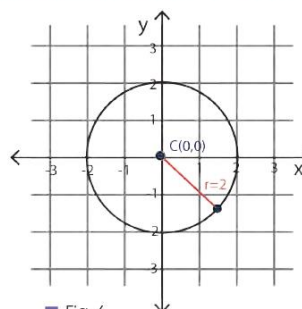


Fig. 6.

1. **Representa** gráficamente las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + y^2 = 6$

d. $x^2 + y^2 = (5)^2$

b. $x^2 + y^2 = 2$

e. $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

c. $x^2 + y^2 = \frac{12}{25}$

2. **Relaciona** las ecuaciones con su respectiva gráfica

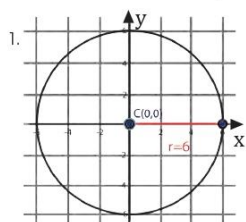


Fig. 7.

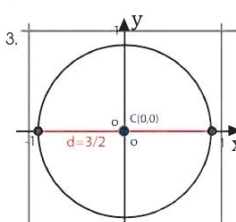


Fig. 8.

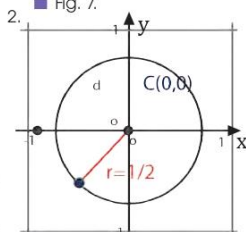


Fig. 9.

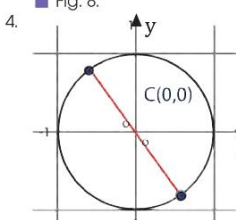


Fig. 10.

a. $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

c. $x^2 + y^2 = 4$

b. $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

d. $x^2 + y^2 = 36$

3. **Determina** las ecuaciones que cumplan con las condiciones dadas.

a. $C(0, 0); d = -\frac{2}{3}$

c. $C(0, 0); r = \sqrt{6}$

b. $C(0, 0); r = 3$

d. $C(0, 0); r = 1\frac{2}{3}$

Prohibida su reproducción

Actividades

1.2. Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k)

Iniciamos con el mismo procedimiento ejecutado anteriormente para obtener la ecuación canónica con C (0, 0), pero en este caso, vamos a sustituir por el centro de coordenadas C (h, k) **pues este se encuentra fuera del origen.**

Empleamos la fórmula de distancia desde un punto P (x, y) al centro C (h, k)

$$d = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Se elimina la raíz: $d^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

Como la distancia es igual al radio, tenemos que:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{Ecuación canónica con C(h, k)}$$

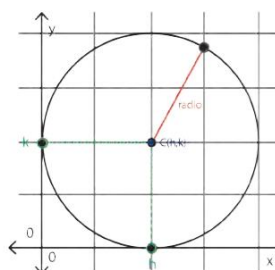


Fig. 11

Ejemplo 4

Determinemos la ecuación canónica de la circunferencia de centro (-2, -3) y radio 5.

Datos: Centro (-2, -3) y radio 5.

Solución:

Reemplazamos en la ecuación canónica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Resolvemos la potencia y los signos

$$(x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 = (5)^2$$

Ecuación canónica con centro (-2, -3) y radio 5.

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Ejemplo 5

Determinemos la ecuación de la circunferencia si los extremos del diámetro son los puntos M (2, 3) y N (-3, -1).

Datos: Puntos M (2, 3) y N (-3, -1).

Solución:

Primero: Calculamos el punto medio entre los puntos M y N.

$$P_{MN} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) ; P_{MN} = \left(\frac{2 + (-3)}{2} ; \frac{3 + (-1)}{2} \right) ; P_{MN} = \left(\frac{-1}{2} ; 1 \right)$$

El punto medio del diámetro coincide con las coordenadas del centro, C $\left(\frac{-1}{2} ; 1 \right)$

Segundo: Calculamos la distancia entre el centro y uno de los puntos, para determinar la longitud del radio.

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} ; r = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{2} \right)^2 + (3 - 1)^2} ; r = \sqrt{\left(\frac{25}{4} + 4 \right)} ; r = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

Reemplazamos las coordenadas del centro y el valor del radio en la ecuación canónica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 ; \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{2} \right)^2 ; \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{41}{4}$$

Ecuación general de la circunferencia

Si desarrollamos la ecuación canónica de la circunferencia, resolviendo el producto notable binomio al cuadrado (en los dos paréntesis), tenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{Ecuación canónica con centro } C(h, k)$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

Resolviendo el binomio al cuadrado

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Ordenando los términos convenientemente

$$A = -2h, B = -2k \quad y \quad C = h^2 + k^2 - r^2$$

Reemplazando las constantes A, B y C

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Ecuación general de la circunferencia

Ejemplo 6

Determinemos las ecuaciones canónica y general de la circunferencia de radio 6, cuyas coordenadas del centro son $(-3, 2)$.

Datos: $r = 6$, $C = (-3, 2)$. a. Ecuación canónica = ? ; b. Ecuación general = ?

Según los datos, conocemos las coordenadas del centro y el valor del radio, así tenemos en la ecuación canónica.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación canónica con centro $C(h, k)$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$$

Al reemplazar los valores de h y k cambian los signos.

Al desarrollar la ecuación canónica con centro h, k, resolvemos los productos notables, y las constantes. Al igualar a cero resulta:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 36$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 + 4 = 36$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$$

Ecuación General de la circunferencia

4. **Determina** las ecuaciones canónica y general para las circunferencias descritas:

- Radio 8, centro $(-2, 3)$.
- Radio 2, centro $(5, 2)$.
- Radio 4, centro $(-2, -1)$.
- Radio 7, centro $(-5, 8)$.
- Radio 12, centro $(-1, 0)$.

5. **Halla** la ecuación de la circunferencia cuyo centro se halla sobre el eje de abscisas y es tangente a la recta $r: y = -x + 3$ en el punto $P = (-1, 4)$.

6. **Halla** la ecuación general de una circunferencia de radio 2 que es concéntrica con la que tiene como extremos de un diámetro los puntos $A = (0, 3)$ y $B = (8, 3)$

7. Considerando las siguientes ecuaciones de hipérbolas, determine las coordenadas del centro, vértices y focos así como la representación gráfica.

a. $\frac{(x + 2)^2}{9} - \frac{(y - 5)^2}{49} = 1$

b. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1$

c. $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

Actividades

Obtención del radio y las coordenadas del centro a partir de la ecuación general de la circunferencia

A partir de la fórmula general, obtendremos la ecuación canónica de la circunferencia utilizando el método de completación para trinomios cuadrados perfectos.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad \text{Ecuación general de la circunferencia}$$

$$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -C \quad \text{Agrupando los términos según } x \text{ e } y.$$

$$\left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = -C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$

Aumentamos el término ideal para completar el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo para dos y elevando al cuadrado el segundo término.

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \quad \text{Factorando los trinomios y resolviendo las fracciones.}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{Comparamos con la ecuación canónica.}$$

Por lo cual, se concluye que el radio es $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

Ejemplo 7

Determinar el valor del radio y las coordenadas del centro a partir de la ecuación general de la circunferencia descrita por: $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 31 = 0$

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 31 = 0 \quad \text{Dato}$$

$$(x^2 + 4x) + (y^2 + 2y) = 31 \quad \text{Agrupando los términos según } x \text{ e } y.$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 31 + 4 + 1 \quad \text{Completando el trinomio.}$$

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 36 \quad \text{Factorando los trinomios}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{Comparamos con la ecuación canónica}$$

8. **Determina** el valor del radio y las coordenadas del centro a partir de las ecuaciones:

a. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

c. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y = 8$

d. $5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$

Actividades

Prohibida su reproducción



■ Fig. 1.

I. LA ESTADÍSTICA

La estadística, es una ciencia que estudia el proceso de análisis de un fenómeno, recolectando información para luego ordenarla, presentarla y analizarla, con la finalidad de describir, comparar y explicar sus características.

Población y muestra

Población es un conjunto finito de elementos o personas que presentan características comunes, objetivos del estudio a determinarse, así por ejemplo tenemos:

- Empleados de la empresa de alimentos «Alimentar».
- Lámparas de iluminación del hotel «Buenaventura».
- Estudiantes de la Unidad Educativa «Nuevo amanecer».

El tamaño de la población se determina por el número de elementos o individuos que se pretende estudiar, por ello es uno de los factores más importantes a la hora de realizar cierto tipo de estudio. Cuando el tamaño de la población es muy extenso, surge la necesidad de estudiar únicamente una parte de la misma, con la finalidad de reducir esfuerzos, tiempo y recursos económicos.

Muestra es un subconjunto de la población; el número de elementos considerados debe ser representativo y conservar las mismas características, relacionando los ejemplos citados en la población tendremos respectivamente:

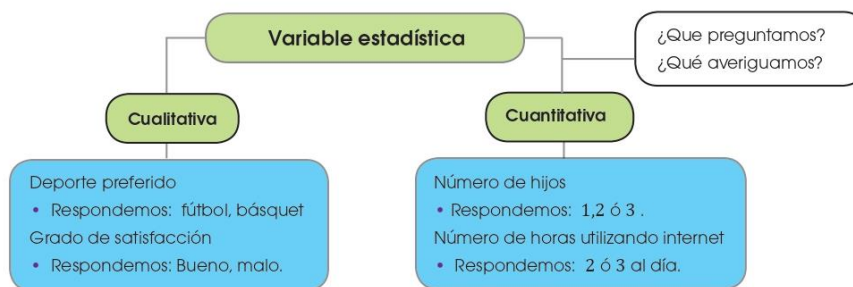
- 120 empleados entre los departamentos de ventas, producción y planificación.
- 25 Lámparas de iluminación entre los pisos 1, 3, 5 así como del lobby.
- 200 estudiantes entre el ciclo básico, básico superior y bachillerato.

Las variables y sus tipos

Variables estadísticas: Son las propiedades o características que se desea evaluar.

Variables cualitativas: Se miden mediante cualidades de tipo nominal u ordinal, no toman valores numéricos; usualmente respondemos a preguntas mediante palabras.

Variables cuantitativas: Son de carácter exclusivamente numérico, pueden ser discretas o continuas. Usualmente respondemos a preguntas o averiguaciones mediante un valor numérico.



Las **variables cualitativas** pueden ser nominales u ordinales; en la primera, los valores no siguen una tendencia de orden determinado, por ejemplo tenemos: el estado civil de una persona, el género de un individuo, lugar de nacimiento...

En cambio, en las **variables cualitativas ordinales** se asignan valores que siguen una tendencia de orden, por ejemplo: Ninguna, algunas veces, muchas veces, siempre.

1.1. La recolección de datos y su interpretación

El instrumento más utilizado para recolectar información sobre cierto tipo de estudio es la **encuesta**; luego de realizada, se organiza en tablas, con la finalidad de realizar el tratamiento de la misma. Entre algunos conceptos integrantes, que figuran en las tablas tenemos:

Frecuencia absoluta: Es el número de veces en que se repite o aparece un valor, el total del número de veces, deberá coincidir con el tamaño de la muestra.

Frecuencia relativa: Es el cociente entre los valores de frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra. Toma valores entre 0 y la unidad, debido a que son fracciones.

El valor total de todas las frecuencias relativas es 1.

De la frecuencia relativa se deriva su interpretación porcentual, donde se halla el producto entre la frecuencia relativa por 100%.

1. En la situación: Se realiza un estudio para determinar el grado de satisfacción del nivel educativo en el Colegio «ABC», que encuestó a 100 estudiantes de los cursos de bachillerato.

Identifica la población, muestra, variable y tipo de variable.

2. **Clasifica** las siguientes variables en cualitativas o cuantitativas: Edad, ocupación, nacionalidad, remuneración económica, hijos, signo zodiacal, comida preferida.

3. **Escribe** tres ejemplos de variables cualitativas nominales y ordinales.

4. **Describe** tres ejemplos de variables cuantitativa.

Actividades

Prohibida su reproducción

1.2. Tabla de frecuencia para datos no agrupados

Los **datos no agrupados** son valores obtenidos y recolectados a través de una encuesta, en una cantidad pequeña relativamente ($n < 30$), mismos que son analizados sin tipo de preclasificación.

Ejemplo 1

Se realiza un estudio para determinar la edad de veinte estudiantes del décimo año de EGB del Colegio «ABC», y se obtuvo los siguientes datos:

14, 15, 14, 14, 13, 16, 16, 15, 15, 15, 15, 15, 14, 14, 14, 15, 16, 16, y 14.

Determinemos la tabla de frecuencias considerando la variable mencionada.

1. Se registran los valores ubicando el menor como primer dato, seguido del resto de valores hasta el mayor, una sola vez, en forma vertical.
2. Se contabiliza el número de datos registrados en los datos estadísticos.
Observación: El total de f_i , debe coincidir con el total de la muestra.
3. Se establece la frecuencia absoluta acumulada, sumando en forma transversal, conservando el primer valor.
Observación: El último valor de f_{ai} , coincide con total de la muestra.
4. Se establece la frecuencia relativa, mediante fracciones donde el numerador es la frecuencia absoluta respectiva y el denominador, el total de la muestra (Σf_i).
Observación: Establecemos el valor decimal utilizando dos decimales.
5. Se establece la frecuencia relativa porcentual, multiplicando los valores respectivos de la frecuencia por 100%.
6. Se establece la frecuencia relativa acumulada, sumando en forma transversal, conservando el primer valor.

Observación: El último valor de f_{ar} , coincide con el total de la unidad si se considera el valor decimal o con el 100 % si se toma en cuenta los valores de fr_p .

xi	fi	fai	fr	frp(%)	far
13	1	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	5	5
14	8	9	$\frac{8}{20} = 0,40$	40	45
15	7	16	$\frac{7}{20} = 0,35$	35	80
16	4	20	$\frac{4}{20} = 0,20$	20	100

$$\Sigma f_i = 20$$

$$\Sigma f_i = 1$$

$$\Sigma f_i = 100\%$$

■ Tabla 1.

Simbología de la tabla:

- xi:** Dato estadístico
- fi:** Frecuencia absoluta
- fai:** Frecuencia absoluta acumulada
- fr:** Frecuencia relativa
- frp:** Frecuencia relativa porcentual
- far:** Frecuencia relativa acumulada

Prohibida su reproducción

1.3. Medidas de tendencia central para datos no agrupados

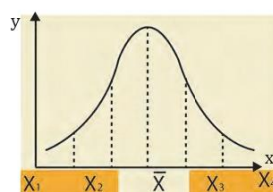
Son medidas estadísticas cuyo cálculo muestra la relación entre un valor determinado y un conjunto de valores. Constituyen un punto central de referencia, en torno al cual los demás valores le circundan. Así tenemos: la **media aritmética**, **mediana** y **moda**.

1.4. Media aritmética

Es el parámetro estadístico, más utilizado en un sinnúmero de estudios.

Sea un determinado número de datos estadísticos: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, la media aritmética se obtiene sumando todos los datos obtenidos y dividiendo para el número de datos.

Debido al proceso descrito, se la conoce también como promedio.



■ Fig. 2.

Ejemplo 2

José obtiene en sus evaluaciones quimestrales, en las diferentes asignaturas: 6,87 , 8,50 , 9,25 , 8,15 , 9,00 , 6,45 y 8,25 . Determinar la media aritmética.

Solución:

$$\bar{x} = \frac{6,87 + 8,50 + 9,25 + 8,15 + 9,00 + 6,45 + 8,25}{7} = \frac{56,47}{7} \approx 8,07$$

José obtiene una media aritmética de 8,07 en sus evaluaciones.

Media aritmética ponderada

La **frecuencia ponderada** relaciona datos estadísticos así como su respectiva periodicidad; se determina mediante el cociente entre la suma del producto de datos y entre los datos y frecuencias y el total de la muestra considerada en el estudio.

Y TAMBIÉN: ?

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum f_i}$$

Simbología

x_i : Dato estadístico

f_i : Frecuencia absoluta

$\sum f_i$: Total de la muestra

Ejemplo 3

20 estudiantes obtienen en el primer parcial, las siguientes calificaciones: 7, 8, 7, 6, 8, 6, 8, 9, 8, 9, 9, 8, 6, 7, 9, 7, 6, 8, 9 y 8. Calculemos la media ponderada.

x_i	f_i	$x_i f_i$
6	4	24
7	4	28
8	7	56
9	5	45

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{153}{20} = 7,65$$

$\sum f_i = 20$ $\sum x_i f_i = 153$ ■ Tabla 2.

La media aritmética de los 20 estudiantes en el primer parcial es de 7,65.

Prohibida su reproducción

1.5. Mediana (Me)

La **mediana** es el parámetro estadístico que ocupa la posición central de los datos estadísticos, dividiendo la serie de datos en dos partes iguales.

Para obtener la mediana se debe ordenar los datos estadísticos de manera ascendente (de menor a mayor); se presentan dos casos:

Caso 1: Cuando el número de datos es par, la mediana se obtiene calculando el promedio de los valores centrales.

Ejemplo 4

Hallemos la mediana, sean los valores: 8, 6, 7, 5, 4, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 7, 8, 10, 12, 7, 8, 9, 6 y 7.

Solución: Se observan veinte valores, los ordenamos y utilizamos los valores centrales.

Ordenando: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 12

Entonces, la mediana se obtendrá: $Me = \frac{7 + 7}{2}$; $Me = \frac{14}{2}$; $Me = 7$

Caso 2: Cuando el número de datos es impar, la mediana se ubica en el valor central de los datos estadísticos.

Ejemplo 5

Determinemos la mediana entre: 25, 45, 35, 67, 34, 56, 54, 34 y 28

Solución: Se observan nueve valores; los ordenamos e identificamos el valor central.

Ordenando: 25, 28, 34, 34, 35, 45, 54, 56, 67

Entonces la mediana es 35.

Actividades

5. Las ventas registradas en dólares, para los meses del año anterior fueron: 300, 250, 450, 230, 235, 125, 450, 750, 800, 230, 650, 1800. **Determina** la media aritmética y la mediana de los datos registrados.

6. En determinado estudio, se observa el tiempo que registra un deportista de alto rendimiento en sus entrenamientos: 3,20; 3,40; 3,52; 3,48; 3,67; 3,15; 3,96; 3,75 y último 3,45. **Halla** los valores de la media aritmética y mediana para el rendimiento del deportista.

7. **Halla** la moda, la media aritmética y la mediana de esta serie de datos.

9,75; 9,50; 9,50; 9,25; 9,50; 9,75

• **Determina** los diferentes parámetros de dispersión (recorrido, desviación media, varianza y desviación típica) de la serie.

8. Se realiza un estudio para determinar el acercamiento a la lectura de 21 estudiantes en un colegio, se pregunta el número de libros leídos en el último mes, los datos registrados son: 3,

2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1. **Determina** la tabla de frecuencias, la media aritmética, la media aritmética ponderada y la mediana de los datos registrados.

9. Una máquina produce piezas que, teóricamente, han de medir 50 mm. Seleccionada una muestra de 39 piezas, se obtuvieron las siguientes medidas, expresadas en milímetros.

49, 49, 50, 52, 50, 50, 49, 50, 52, 51, 50, 47, 50, 51, 49, 50, 50, 51, 49, 52, 50, 51, 50, 51, 50, 50, 51, 50, 48, 50, 53, 50, 52, 49, 50, 53, 49, 48, 55

Calcula la moda, la media y la mediana de esta muestra.

10. Se desea llevar a cabo un estudio estadístico de la edad de los visitantes de un museo. Para ello, se considera una muestra representativa y se obtienen estos resultados.

13, 15, 18, 22, 21, 35, 38, 45, 20, 21, 19, 24, 28, 67, 26, 24, 31, 23, 25, 27, 25, 16, 17, 19, 20, 21

Determina la media aritmética y la mediana.

1.6. Moda (Mo)

La **moda** es una medida estadística que muestra el dato estadístico que más se repite en el estudio de una variable, por ende, la moda se establece también como el valor que tiene la mayor frecuencia absoluta. Puede haber más de una moda en el análisis de datos.

Ejemplo 6

Determinemos la moda entre los valores: 3, 5, 6, 7, 6, 9, 7, 8, 10, 9, 7, 8, 9, 6 y 7.

Solución: Tenemos quince valores, de los cuales se observa que: el valor 7 se repite cuatro veces, a diferencia del valor 6, que se repite 3 veces; por ello, se concluye que la moda de los datos estudiados es 7.

Ejemplo 7

Determine la moda de: 5, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 2, 5, 2, 3 y 4.

Solución: Según los datos, la moda será: 2 y 3. Por ende tenemos un estudio bimodal.

Ejemplo 8

Se encuesta a 25 estudiantes sobre el deporte preferido, se propusieron las opciones: fútbol (F), voleibol (V), tenis (T), básquet (B). Las respuestas fueron:

F, V, T, T, F, F, B, B, V, T, T, V, V, F, F, V, F, V, T, B, T, V, B y F.

Analizamos una variable cuantitativa, cuyos valores y frecuencia son respectivamente:

X_i	f_i
Fútbol (F)	8
Voleibol(v)	7
Tenis (T)	6
Básquet (B)	4

■ Tabla 3.

En el cuadro se observa que la mayor frecuencia absoluta es ocho y corresponde a fútbol, por ende la moda del conjunto de datos es fútbol.

11. Los valores de durabilidad de las pilas AAA, en un determinado juguete son: 32, 33, 31, 32, 29, 30, 31, 32, 30, 32, 34, 33, 31, 32, 29, 33, 31, 32, 34, 29, 31, 30, 30, 32, 29, 32, 32, 32, 34, 30, 29, 30, 32, 32, 31, 32, 31.

Determina la media aritmética, la mediana y moda.

12. **Determina** los valores de la media aritmética, media aritmética ponderada, mediana y moda de:

6, 5, 4, 3, 4, 3, 6, 6, 7, 5, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 6.

13. Según los datos de la tabla:

X_i	f_i
8	23
9	13
10	19
11	23

■ Tabla 4.

Determina la media aritmética ponderada, la mediana y moda de los datos registrados.

Actividades

Prohibida su reproducción

Y TAMBIÉN:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Simbología:

DM: Desviación media
 x_i : Valor estadístico
 n: Número de datos

1.7. Desviación media para datos no agrupados (DM)

Se denota como DM a la media aritmética de los valores absolutos de la diferencia entre un valor determinado y la media aritmética del respectivo conjunto de datos estadísticos. Relaciona las desviaciones de valores con respecto a la media aritmética.

Ejemplo 9

Los valores: 8, 6, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 8 y 9 constituyen la edad de un grupo de niños que participan en un curso vacacional. Determinemos la desviación media.

Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{8 + 6 + 7 + 7 + 9 + 6 + 6 + 7 + 8 + 9}{10} = \frac{73}{10} \approx 7,30$$

Segundo: Calculamos la desviación media (DM).

$$DM = \frac{|8 - 7,30| + |6 - 7,30| + |7 - 7,30| + |7 - 7,30| + |9 - 7,30| + |6 - 7,30| + |6 - 7,30| + |7 - 7,30| + |8 - 7,30| + |9 - 7,30|}{10}$$

$$DM = \frac{|0,70| + |1,30| + |0,30| + |0,30| + |1,70| + |1,30| + |1,30| + |0,30| + |0,70| + |1,70|}{10}$$

$$DM = \frac{9,60}{10} ; DM = 0,96$$

14. Sean los valores : 4, 5, 6, 7, 8, 5, 6, 5, 8, 4, 5 y 8.

Determina:

- La media aritmética
- La mediana
- La moda
- La desviación media

15. **Determina** la desviación media de una distribución dada por los siguientes valores: 25, 28, 28, 29, 25, 25, 27, 28, 29, 25, 29, 27, 25, 27, 26 y 28.

16. **Determina** los valores de la media aritmética, media aritmética ponderada, mediana, moda y desviación media de: 26, 25, 24, 27, 28, 2, 26, 27, 26, 25 y 26.

17. Según los datos de la tabla, **determina** lo siguiente:

x_i	f_i
2	2
3	7
5	8
7	13
8	12

■ Tabla 5.

- ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
- Determina** la media aritmética.
- Determina** la mediana.
- Determina** la moda.
- Determina** la desviación media.

Actividades

1.8. La Varianza para datos no agrupados (σ^2)

Es una medida de dispersión, definida como la diferencia entre el cociente del cuadrado de cada uno de los datos estadísticos y el número de datos menos el cuadrado de la media aritmética.

Y TAMBIÉN: 

$$\sigma^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Simbología:

σ^2 : Varianza

X_i : Valor estadístico

$\bar{x}$: Media aritmética

Ejemplo 10

Hallar la varianza entre los datos: 7, 9, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 6 y 8.
Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

Segundo: Calculamos la varianza.

$$\bar{x} = \frac{7 + 9 + 7 + 7 + 9 + 6 + 6 + 7 + 6 + 8}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{72}{10}$$

$$\bar{x} = 7,20$$

$$\sigma^2 = \frac{7^2 + 9^2 + 7^2 + 7^2 + 9^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 6^2 + 8^2}{10} - 7,20^2$$

$$\sigma^2 = \frac{49 + 81 + 49 + 49 + 81 + 36 + 36 + 49 + 36 + 64}{10} - 7,20^2$$

$$\sigma^2 = \frac{4530}{10} - 51,84$$

$$\sigma^2 = 453 - 51,84$$

$$\sigma^2 = 401,16$$

18. Sean los valores : 14, 16, 18, 19, 16, 18, 18, 17, 15, 16, 14 y 18.

Determina:

- La varianza
- La media aritmética
- La mediana
- La desviación media.

19. **Determina** la varianza de los siguientes valores: 25, 28, 28, 29, 25, 25, 27, 28, 29, 25, 29, 27, 25, 27, 26 y 28.

20. **Determina** los valores de la media aritmética y la varianza de los siguientes datos:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	12	8	7	6	5	3	3	2	12

■ Tabla 6.

21. Según los datos en las tablas, **determina**:

X_i	f_i
13	3
14	4
16	6
18	6
20	8
22	15

■ Tabla 7.

X_i	f_i
2	4
3	5
5	7
6	15
7	17
8	18

■ Tabla 8.

- ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
- Determina** la media aritmética.
- Determina** la mediana.
- Determina** la desviación media.
- Determina** la varianza.

Actividades

Prohibida su reproducción

1.9. Desviación típica para datos no agrupados (σ)

Y TAMBIÉN:



$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Simbología:

σ : Desviación típica

x_i : Dto estadístico

$\bar{x}$: Media aritmética

Ejemplo 11

Hallamos la varianza entre los datos: 7, 9, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 6 y 8.

Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{12 + 13 + 14 + 16 + 14}{5} = \frac{69}{5} = 13,8$$

Segundo: Calculamos la desviación típica o estándar.

$$\sigma = \sqrt{\frac{12^2 + 13^2 + 14^2 + 16^2 + 14^2}{5} - 13,8^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{144 + 169 + 196 + 256 + 196}{5} - 190,44}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{961}{5} - 190,44}$$

$$\sigma = \sqrt{1,8}$$

$$\sigma = 1,34$$

22. Sean los valores: 245, 250, 252, 253, 251, 250, 250, 247, 249 y 253.

Determina:

- La varianza
- La media aritmética
- La mediana
- La desviación media
- La desviación típica.

23. **Halla** la varianza y la desviación típica de los siguientes valores: 27, 28, 28, 29, 25, 25, 26, 27, 29, 25, 29, 26, 24 y 28.

24. **Determina** los valores de la desviación típica y la varianza de los siguientes datos:

x_i	12	14	16	20	25	27	29	30
f_i	11	32	20	17	15	9	8	12

■ Tabla 9.

25. Según los datos en las tablas, **determina:**

x_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
f_i	7	8	8	7	5	2

■ Tabla 10.

x_i	5,34	6,34	5,97	6,03	5,99	6,05
f_i	23	32	29	28	27	30

■ Tabla 11.

x_i	2	2,7	2,9	2,9	2,6	2,4
f_i	2	8	7	5	9	5

■ Tabla 12.

- ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
- Determina** la media aritmética
- Determina** la desviación estándar
- Determina** la desviación media
- Determina** la varianza

Actividades

Prohibida su reproducción

Tabla de frecuencia para datos agrupados

Los datos agrupados al igual que los no agrupados son recolectados a través de una encuesta, la principal característica es que conforman grupos (intervalos), para ello previamente se determina el valor del rango y posteriormente el número de intervalos según la disposición de datos.

Y TAMBIÉN:

Los intervalos hallan plena aplicación cuando los datos estadísticos tienen una diferencia considerable.

Rango de datos

En un listado de datos estadísticos, el rango se determina mediante la diferencia entre el valor mayor ($x_{\text{máx}}$) y el valor menor ($x_{\text{mín}}$).

$$\text{Rango} = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$$

Ejemplo: En los datos: 34, 37, 35, 33, 33, 38, 39, 38, 37, 39, 39, 38, determinar el valor del rango.

Solución: 34, 37, 35, 33, 33, 38, 39, 38, 37, 39, 39, 38.

Rango = $x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$; Rango = $39 - 33$; Rango = 6

Disposición de intervalos

Los intervalos se conforman de acuerdo al valor obtenido en el rango, debido a que el número que se obtiene se dispone según sus factores. En el ejemplo anterior, el rango resultó 6, sus respectivos factores son entre otros: 1, 2, 3, 6, donde seleccionamos dos números de manera que el primero represente el número de intervalos y el segundo, la manera de disponerse. Para el ejemplo de rango = 6, es posible conformar dos intervalos de tres o también tres intervalos de dos.

Observación: En el caso de que el rango resulte un número primo, se procede a aumentar una unidad a la cantidad mayor, y de igual forma, restar una unidad a la cantidad menor, hasta lograr en la diferencia un número divisible.

Ejemplo: En los datos : 59, 57, 68, 69, 86, 75, 89, 88, 87, 89, 90, 94, determinemos el valor del rango y el número de intervalos a conformar en la tabla de frecuencias.

Rango = $x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$; Rango = $94 - 57$; Rango = 37

Aumentando y disminuyendo: Rango = $X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}}$; Rango = $95 - 56$; Rango = 39

Entonces, al observar los factores de 39, podemos concluir que es posible formar trece intervalos de tres o, en su defecto, tres intervalos de trece.

Marca de clase (x_i)

Es valor medio de cada clase y se obtiene mediante el promedio del valor mínimo del intervalo y el valor mayor del intervalo.

Ejemplo 12

En los datos: 12; 50; 13; 25; 18; 25; 17; 50; 21; 25; 22; 50; 23; 25; 25; 25; 28; 50; 27; 75; 28; 00; 29; 25; 30; 25; 32; 25; 34; 50; 35; 25; 37; 25; 37; 25; 38; 00; 27; 25; 28; 50; 26; 25; 32; 50; 35; 25; 36; 40; 34; 50; 35; 25; 38; 00; 39; 65; 40; 25; 42; 25; 30; 75; 25; 75; 25; 50; 26; 25; determinemos el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase.

Solución:

Rango = $x_{\max} - x_{\min}$; Rango = $42,50 - 12,5$; Rango = 30

Entonces se pueden formar los intervalos según las opciones:

- Cinco intervalos que comprendan seis unidades.
- Seis intervalos que comprendan cinco unidades.
- Diez intervalos que comprendan tres unidades.
- Tres intervalos que comprendan diez unidades.

Para el ejemplo, escogeremos cinco intervalos que comprendan seis unidades, así tendremos la siguiente tabla de frecuencias para intervalos:

Luego de determinar los intervalos, calculamos la marca de clase.

Realizamos el conteo de los 35 valores que se encuentren dentro del intervalo para determinar la frecuencia.

Se verifica que el total de la frecuencia absoluta coincide con el número de datos de la muestra.

Intervalos	X_i	f_i
[12,5 – 18,5[	15,5	4
[18,5 – 24,5[	21,5	3
[24,5 – 30,5[	27,5	12
[30,5 – 36,5[	33,5	8
[36,5 – 42,5[	39,5	8

■ Tabla 13.

$\Sigma f_i = 35$

26. En los datos: 12, 50, 38, 26, 55, 18, 27, 13, 25, 18, 25, 17, 50, 28, 50, 27, 75, 28, 29, 25, 67, 34, 30, 25, 32, 25, 34, 50, 35, 25, 37, 25, 37, 25, 28, 50, 26, 25, 32, 50, 35, 25, 36, 50, 55, 35, 37, 45, 54, 36, 34, 50, 35, 25, 38, 42, 25, 30, 25, 58, 25, 50, 26, 25; **determina** el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase.

27. **Considera** las estaturas de 28 alumnos expresadas en centímetros.

154 158 162 148 163 153 159 180 165 168
156 148 162 157 153 158 147 165 166 175
172 167 160 155 147 156 161 159

Calcula el rango, el número de intervalos, realizar la tabla y colocar la marca de clase.

28. Al lanzar un dado cuarenta y dos veces, obtenemos los siguientes resultados.

3, 2, 1, 6, 3, 5, 4, 2, 4, 2, 6, 4, 1, 6, 4, 5, 1, 1, 2, 6, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 3, 1, 5, 6, 5, 6, 2, 4, 1, 6, 5, 1, 2, 6

Calcula el rango, el número de intervalos, realizar la tabla y colocar la marca de clase.

29. Las masas en gramos de treinta y tres piezas producidas por una máquina son:

6,8; 6,5; 6,9; 7,0; 6,8; 6,7; 6,9; 6,4; 7,0; 7,1; 6,7; 6,6; 6,4; 6,7; 7,2; 6,8; 6,9; 6,9; 6,5; 7,0; 6,9; 6,7; 6,5; 6,8; 7,0; 6,8; 6,4; 6,9; 7,1; 7,0; 6,6; 6,6; 6,8

Calcula el rango, el número de intervalos, realizar la tabla y colocar la marca de clase.

Actividades

1.10. Medidas de tendencia central para datos agrupados

Los datos agrupados se caracterizan por aplicarse para una cantidad de datos estadísticos mayor que 20, los mismos que son agrupados en intervalos para analizarlos de manera más simple, resumiendo la información. Al igual que en los datos no agrupados, también se dispone de la media aritmética, mediana y moda, cuyos cálculos difieren de los datos no agrupados.

1.11. Media aritmética para datos agrupados

Es el parámetro estadístico más representativo de un determinado grupo de datos. Se obtiene mediante el cociente entre el producto de la marca de clase (x_i) y la frecuencia absoluta (f_i); para el cálculo se utiliza la siguiente expresión:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + \dots + x_n f_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{n}$$

Ejemplo 13

En una institución educativa se realiza un estudio, en el cual se analiza las estaturas medidas en centímetros de treinta estudiantes, los resultados fueron: 167, 158, 167, 165, 167, 170, 158, 168, 167, 160, 159, 162, 154, 155, 158, 168, 157, 169, 166, 168, 173, 162, 165, 170, 159, 162, 158, 170, 150, 155. Considerando los datos, determinemos el valor de la media aritmética para datos agrupados.

Solución:

Determinamos el rango: Rango = $x_{\max} - x_{\min}$; Rango = $170 - 150$; Rango = 20.

Pero se debe considerar que el valor 170 no debe incluirse como extremo superior de un intervalo entonces: aumentando y disminuyendo: Rango = $171 - 149$; Rango = 22.

Se establecerían dos intervalos de once o también once de dos unidades, por conveniencia de análisis generamos otra clase de intervalos, entonces: Rango = $172 - 148$; Rango = 24.

Establecemos los intervalos: Realizaremos cuatro intervalos de seis unidades.

Formamos la tabla de frecuencias para datos agrupados:

En el conteo tenemos:

167, 158, 167, 165, 167, 170, 158, 168, 167, 160, 159, 162, 154, 155, 158, 168, 157, 169, 166, 168, 173, 162, 165, 170, 159, 162, 158, 170, 150, 155

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{n} = \frac{4902}{30} \approx 163,40$$

El valor de $\bar{x}$ es de 163,40

Intervalos	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[148 - 154[	151	1	151
[154 - 160[	157	10	1570
[160 - 166[	163	5	815
[166 - 172[	169	14	2366

■ Tabla 14.

$$\sum f_i = 30 \quad \sum x_i f_i = 4902$$

Prohibida su reproducción

1.12. Mediana para datos agrupados (Me)

Se la conoce como clase de mediana, es una medida estadística que al igual que en los datos no agrupados, divide el conjunto de datos estadísticos en la mitad, generando un punto medio de referencia, se calcula mediante:

$$Me = Lim_{inf} + \frac{\frac{n}{2} - f_{aiant}}{f_i} \cdot a$$

Simbología:

Me = mediana.

Lim_{inf} = límite inferior del intervalo de la mediana.

n = número de datos estadísticos.

f_{ainf} = frecuencia absoluta acumulada en el intervalo anterior al de la mediana.

a = amplitud del intervalo.

Ejemplo 14

Los datos estadísticos que se obtuvieron en una encuesta fueron:

28 32 29 30 30 27 31 30 28 27

27 26 32 34 33 26 33 34 33 25

30 30 27 31 27 26 32 34 29 32

Determinemos el valor de la mediana para datos agrupados.

Solución:

Determinamos el rango: Rango = $x_{máx} - x_{mín}$; Rango = $34 - 25$; Rango = 9

El valor 34 no puede incluirse como valor superior del intervalo entonces es necesario aumentar y disminuir: Rango = $35 - 24$; Rango = 11, resulta ser número primo entonces aumentamos y disminuimos: Rango = $36 - 23$; Rango = 13, resulta ser número primo nuevamente entonces Rango = $37 - 22$; Rango = 15.

Establecemos los intervalos: Realizaremos tres intervalos de cinco unidades.

Formamos la tabla de frecuencias para datos agrupados:

En el conteo tenemos:

28 32 29 30 30 27 31 30 28 27

27 26 32 34 33 26 33 34 33 25

30 30 27 31 27 26 32 34 29 32

Intervalos	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[22 - 27[	24,5	4	4
[27 - 32[	29,5	15	19
[32 - 37[	34,5	11	30

■ Tabla 15.

$\Sigma f_i = 30$

Determinamos $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$ y ubicamos los valores superior e inferior a $\frac{n}{2}$ en f_{ai} ; así tenemos

$4 < \frac{n}{2} < 19$, además ubicamos el intervalo del valor superior: 27 - 32.

$$Me = Lim_{inf} + \frac{\frac{n}{2} - f_{aiant}}{f_i} \cdot a ; Me = 27 + \frac{15 - 4}{15} \cdot 5$$

$$Me = 27 + \frac{55}{15} ; Me = 27 + \frac{11}{3} ; Me = \frac{92}{3} \quad \text{Donde } Me = 30,67$$

1.13. Moda para datos agrupados (Mo)

Para datos agrupados, es el dato estadístico que más se repite en el estudio de cierta variable, se calcula mediante:

$$Mo = Lim_{inf} + \frac{\Delta f_1}{\Delta f_1 + \Delta f_2} \cdot a$$

Simbología:

Mo = moda.

Lim_{inf} = límite inferior del intervalo de la moda.

Δf_1 = diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo modal menos la frecuencia absoluta del intervalo anterior.

Δf_2 = diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo modal menos la frecuencia absoluta del intervalo consecutivo.

a = amplitud del intervalo.

Ejemplo 15

La siguiente tabla de frecuencias resume en intervalos el número de artículos vendidos durante 43 días. Determinemos la moda para datos agrupados.

Intervalos	x_i	f_i	fai
[120 - 135[	127,5	5	7
[135 - 150[	142,5	9	16
[150 - 165[	157,5	3	28
[165 - 180[	172,5	2	43
		$\Sigma f_i = 19$	

■ Tabla 16.

Reemplazamos en la expresión:

$$Mo = Lim_{inf} + \frac{\Delta f_1}{\Delta f_1 + \Delta f_2} \cdot a \quad ; \quad Mo = 135 + \frac{4}{10} \cdot 15 \quad ; \quad Mo = 135 + 6 \quad ; \quad Mo = 141$$

Por lo tanto la moda es 141 artículos.

Solución:

Frecuencia absoluta modal = 9

Frecuencia absoluta intervalo anterior = 5

Frecuencia absoluta intervalo siguiente = 3

Y además a = 15.

$$\Delta f_1 = 9 - 5 = 4$$

$$\Delta f_2 = 9 - 3 = 6$$

30. Para la siguiente disposición de datos:

12 28 23 32 36 48 50 55 57 26
48 50 55 57 48 12 28 23 48 12
15 28 29 32 32 28 23 55 12 28
48 12 28 28 29 32 32 32 36 48

Determina el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase, la media aritmética, mediana y moda para datos agrupados.

31. Según la tabla:

Intervalos	X_i	f_i
[130 - 150[	140	5
[150 - 170[	160	7
[170 - 190[	180	12
[190 - 210[	200	4
		$\Sigma f_i =$

■ Tabla 17.

Determina los valores de la media aritmética, mediana y moda para datos agrupados.

Actividades

Prohibida su reproducción