



Rafael Galeth
COLEGIO VIRTUAL INTENSIVO PCEI

1ro Matemáticas

Bachillerato

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministro de Gestión Educativa
Wilson Rosalino Ortega Mafla

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaría de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Roqueline Arguelles
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 1
Bachillerato primer curso

Antonio Garrido González
Dirección general

José Luis Gómez Cutillas
Dirección editorial

José Francisco Vilchez Román
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé
© grupo edebé, 2008
Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com



ISBN 978-9978-71-992-3
Primera impresión: julio 2016
Este libro fue evaluado por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el 30 de mayo de 2016.

© Ministerio de Educación del Ecuador, 2016
Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

La reproducción parcial o total de esta publicación, en cualquier forma y por cualquier medio mecánico o electrónico, está permitida siempre y cuando sea autorizada por los editores y se cite correctamente la fuente.



**Ministerio
de Educación**

ADVERTENCIA

Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Ministerio
de Educación



República
del Ecuador

Esta obra es un extracto de título e ISBN 978-9978-71-992-3 del libro del Ministerio de Educación.
Todos los derechos le pertenecen al autor.

PRIMERO DE BACHILLERATO

UNIDAD 1 (16-55)

- 8 Propiedades de los números reales-Operaciones con reales
- 9 Operaciones con potencias y radicales - Intervalos de números reales
- 16 Cálculo de logaritmos
- 19 Ecuaciones e inecuaciones

UNIDAD 2 (56-87)

- 24 Concepto de función-Función afín
- 26 Función potencia entera negativa con $n = -1, -2$.
- 29 Operaciones con funciones reales
- 35 Modelos matemáticos con funciones cuadráticas.

UNIDAD 3

- 37 Vectores fijos
- 38 Vectores equipolentes
- 39 Vectores libres
- 40 Operaciones con vectores

UNIDAD 4

- 43 Ecuaciones de la recta -Distancias. Distancia entre dos puntos
- 45 Repaso de conceptos básicos
- 47 Tablas estadísticas datos no agrupados y de datos agrupados
- 50 Medidas de dispersión

I. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Ya conoces las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto de los números racionales y también sus propiedades. En el caso de números irracionales, tomaremos aproximaciones decimales de estos números y operaremos con ellas. Es decir, las reduciremos a operaciones con números racionales.

Adición de números reales	Multiplicación de números reales
Para sumar dos números reales, sumamos las sucesivas aproximaciones decimales del mismo orden. $\begin{array}{r} \sqrt{3} = 1.732\ 050\ 80... ; \quad \sqrt{8} = 2.828\ 427\ 12... \\ 1.732\ 0 < \sqrt{3} < 1.732\ 1 \\ + 2.828\ 4 < \sqrt{8} < 2.828\ 5 \\ \hline 4.560\ 4 < \sqrt{3} + \sqrt{8} < 4.560\ 6 \end{array}$ El número real suma de $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ es: $\sqrt{3} + \sqrt{8} \approx 4.560\ 5$ Observa que solo son correctas tres de las cuatro cifras decimales obtenidas al sumar las aproximaciones. Si queremos obtener la suma con un determinado orden de aproximación, debemos tomar algún orden más en los sumandos.	Para multiplicar dos números reales multiplicamos las sucesivas aproximaciones decimales del mismo orden. $\begin{array}{r} \sqrt{6} = 2.449\ 489\ 74... ; \quad \pi = 3.141\ 592\ 65... \\ 2.449\ 4 < \sqrt{6} < 2.449\ 5 \\ \times 3.141\ 5 < \pi < 3.141\ 6 \\ \hline 7.694\ 790\ 1 < \sqrt{6} \cdot \pi < 7.695\ 349\ 2 \end{array}$ El número real suma de $\sqrt{6} \cdot \pi$ es: $\sqrt{6} \cdot \pi \approx 7.694\ 795$ En este caso, solo podemos asegurar las dos primeras cifras decimales del producto. Como en la adición, si queremos obtener el producto con un determinado orden de aproximación, debemos tomar algún orden más en los factores.

■ Tabla 1

1.1 Propiedades de los números reales

Como la adición y la multiplicación de números reales consisten en sumar y multiplicar aproximaciones decimales, que son números racionales, las propiedades en $\mathbb{R}$ son las mismas que en $\mathbb{Q}$.

Se cumple: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Y TAMBIÉN:

Sustracción y división de números reales

- La **resta** de dos números reales la obtenemos al sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.
 $a - b = a + (-b)$
- El **cociente** de dos números reales lo obtenemos al multiplicar uno de ellos por el inverso del otro (siempre que éste sea diferente de cero).

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad (b \neq 0)$$

Adición	Multiplicación
Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$	Elemento neutro: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$	Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Elemento opuesto: $a + (-a) = (-a) + a = 0$	Elemento inverso: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
Conmutativa: $a + b = b + a$	Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva de la multiplicación respecto de la adición: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

■ Tabla 2

Por cumplirse estas propiedades, decimos que el conjunto $\mathbb{R}$ con las operaciones de adición y multiplicación tiene estructura de **cuerpo conmutativo**.

1.2. Propiedades de orden de los números reales

Hemos visto que los números reales pueden representarse sobre la recta.

Esta representación permite establecer un orden en el conjunto $\mathbb{R}$.

Dados dos números reales, **a** y **b**, decimos que **a** es menor que **b** y escribimos $a < b$ si, al representarlos sobre la recta real, **a** queda situado a la izquierda de **b**.

A partir de la relación $<$, podemos definir las restantes relaciones:

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b \quad a > b \Leftrightarrow b < a \quad a \geq b \Leftrightarrow b < a \vee b = a$$

De estas definiciones deducimos las siguientes propiedades:

- Propiedad reflexiva: $a \leq a$
- Propiedad antisimétrica: $a \leq b$ y $b \leq a \Leftrightarrow a = b$
- Propiedad transitiva: $a \leq b$ y $b \leq c \rightarrow a \leq c$
- Propiedad de orden total: $a \leq b \vee b \leq a$

Por último, enunciaremos dos propiedades que tienen que ver con las operaciones y las desigualdades:

Si sumamos un mismo número a los dos miembros de una desigualdad, esta se mantiene:

$$\text{si } a \leq b \Leftrightarrow a \pm c \leq b \pm c$$

Si se multiplican o dividimos los dos miembros de una desigualdad por un mismo número real, se mantiene el sentido de la desigualdad si el número es positivo, y se invierte el sentido si es negativo:

$$\text{si } a \leq b \text{ y } c > 0 \quad 1^\circ \quad a \leq c \cdot b$$

$$\text{si } a \leq b \text{ y } c < 0 \quad 1^\circ \quad a \geq c \cdot b$$

Y TAMBIÉN:

El signo $\Leftrightarrow$ se lee si, y sólo si, y significa que las expresiones que aparecen a ambos lados son equivalentes.

Análogamente, podemos definir la relación de orden en sentido contrario, es decir: $b > a$ si la representación de **b** en la recta está a la derecha de la de **a** o si $b - a > 0$.

Actividades

- Representa** gráficamente de forma geométrica sobre la recta real los números $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{8}$
- Representa** gráficamente sobre la recta real los números siguientes: $-\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$, $-3\sqrt{6}$
- Al determinar el valor de $\sqrt{10}$ con la calculadora obtenemos el siguiente número: 3,16227766...
Representa sobre la recta este número de manera aproximada.
- Ordena** los números reales de cada par.
a) $-\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2}$ b) π y $3,14$ c) π y $\sqrt{11}$
- Representa** sobre la recta real y ordena de menor a mayor los números siguientes:
 $\sqrt{2}$; $-\frac{1}{3}$; 0; 3,1514; $-\sqrt{3}$; π
- Ordena** de menor a mayor el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas si x es un número real mayor que 1.
 $\frac{2}{5}x$; x ; $x \cdot 10^{-2}$; $0,3x$; $-\frac{1}{5}x$; $\frac{4x}{9}$

Prohibida su reproducción

1.3. Potenciación de números reales con exponente entero

Sabemos que el producto de varios números racionales iguales puede expresarse como una potencia de base racional.

$$\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

La **potencia** de base a , es un número **real** y su **exponente** es un número **natural** n , la potencia es el producto del número a por sí mismo, n veces.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}}$$

$$\frac{a^6}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^1$$

Pero, ¿qué sucede si el exponente de una potencia es 1? En tal caso no podemos aplicar la definición de potencia, ya que no existen productos con un único factor. En este caso se toma como valor de la potencia la propia base. Así, por ejemplo, $\pi^1 = \pi$.

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} = a^1 \quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

Las **operaciones con potencias** de base real y exponente natural tienen las mismas propiedades que las de base racional.

Consideremos seguidamente el caso en que el **exponente** sea un **número entero**.

Las potencias de base real y exponente entero positivo son justamente las potencias de base real y exponente natural. Pero ¿qué ocurre si el exponente es 0 o un número entero negativo?

A las potencias de exponente 0 o un número entero negativo las definimos de manera que las **propiedades de las potencias** de exponente natural **continúen siendo válidas**, en particular la propiedad de la división de potencias de la misma base.

Prohibida su reproducción

Potencias de exponente 0	Potencias de exponente negativo
Consideramos la división $\pi^4 : \pi^4$. $\frac{\pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi}{\pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi} = 1$ $\pi^4 : \pi^4$ Si aplicásemos la regla para dividir potencias $\pi^0 = 1$ $\pi^4 : \pi^4 = \pi^{4-4} = \pi^0$ La potencia de base número real a, $a \neq 0$, y exponente 0 es igual a 1. $a^0 = 1$, con $a \neq 0$	Consideramos la división $\pi^3 : \pi^5$. $\frac{\pi \cdot \pi \cdot \pi}{\pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi} = \frac{1}{\pi \cdot \pi} = \frac{1}{\pi^2}$ $\pi^3 : \pi^5$ Si aplicásemos la regla para dividir potencias $\pi^{-2} = \frac{1}{\pi^2}$ $\pi^3 : \pi^5 = \pi^{3-5} = \pi^{-2}$ La potencia de base número real a, $a \neq 0$, y exponente un número entero negativo - es igual al inverso de la potencia de base a y exponente positivo. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

■ Tabla 3

1.6. Operaciones con radicales

Podemos multiplicar, dividir, elevar a una potencia o extraer la raíz de cualquier radical. Sin embargo, para sumar o restar dos radicales, estos deben ser semejantes.

Suma y resta de radicales

La suma o resta de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los radicales sumandos.

$$a \cdot \sqrt[n]{b} + c \cdot \sqrt[n]{b} = (a + c) \cdot \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 1

Calcula:

a. $-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$

b. $7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

c. $12\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$

Desarrollo:

a. $-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = (-1 + 3 - 4 + 8) \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b. $7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (7 + 8) \sqrt{5} + (-6 - 3 - 4) \sqrt{3} = 15\sqrt{5} - 13\sqrt{3}$

c. $12\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 9\sqrt{7} = (12 - 8 + 9) \cdot \sqrt{7} = 13\sqrt{7}$

Multiplicación de radicales

El producto de radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyo coeficiente y cuyo radicando son iguales, respectivamente, a los productos de los coeficientes y los radicandos de los factores.

$$a \sqrt[n]{b} \cdot c \sqrt[n]{d} = a \cdot c \sqrt[n]{b \cdot d}$$

División de radicales

El cociente de dos radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyo coeficiente y cuyo radicando son iguales, respectivamente, al cociente de los coeficientes y los radicandos de los radicales dividiendo y divisor.

$$\frac{a \sqrt[n]{b}}{c \sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c} \sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

10. Efectúa.

a. $-2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 7\sqrt{7}$

b. $\frac{1}{3\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - \frac{1}{6\sqrt{2}}$

c. $5\sqrt{11} - 3\sqrt{17} - 4\sqrt{11} - 9\sqrt{11} + 8\sqrt{17}$

11. Expresa como la raíz de un cociente:

$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2b}}, \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16c}}, \frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{3a}}$

Actividades

Prohibida su reproducción

Ejemplo 2

Calcula.

a. $2\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 7\sqrt{3}$

b. $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

c. $\frac{6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$

Solución:

a. $2\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 7\sqrt{3} = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 3} = 14 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$

b. $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{3}{2}}$

c. $\frac{6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \frac{6 \cdot 6}{8} \sqrt{5} = \frac{9}{2} \sqrt{5}$

Potencia de un radical

La potencia de un radical es igual a otro radical cuyo coeficiente y cuyo radicando están elevados a dicha potencia.

$$(a \sqrt[n]{b})^m = a^m \cdot \sqrt[n]{b^m}$$

Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical cuyo radicando es el mismo y cuyo índice es el producto de los índices de las raíces.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Ejemplo 3

Calcula.

a. $(2\sqrt{7})^5$

b. $\sqrt[3]{\sqrt{48}}$

c. $\sqrt{\sqrt{3}}$

Solución:

a. $(2\sqrt{7})^5 = 2^5 \cdot (\sqrt{7})^5 = 2^5 \sqrt{7^5}$

b. $\sqrt[3]{\sqrt{48}} = \sqrt[2 \cdot 3]{48} = \sqrt[6]{48}$

c. $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[2 \cdot 2]{3} = \sqrt[4]{3}$

12. Si son ciertas o falsas las siguientes igualdades:

a. $\sqrt{8 \cdot a} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a}$

d. $\sqrt{93^3} = \sqrt[3]{93}$

b. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

e. $\sqrt{\sqrt{81}} = 3$

c. $\sqrt{81} = \sqrt{3} \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{27}$

f. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

13. Calcula.

$$\sqrt{\sqrt{625}}; (\sqrt{5})^2; \left(\sqrt{\frac{12}{7}}\right)^4; \sqrt{\sqrt{16}}$$

Prohibida su reproducción

Actividades

1.7. Operaciones combinadas

También podemos encontrar series de operaciones combinadas en las que aparezcan radicales. Para resolverlas tendremos en cuenta el orden de prioridad de las operaciones que ya conoces.

Ejemplo 4

Calcula.

a. $\sqrt{2} (3 - 4\sqrt{5}) = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{10}$

↑ Aplicamos la propiedad distributiva.

b. $(2 + 3\sqrt{2}) \cdot (5 - \sqrt{2}) = 2(5 - \sqrt{2}) + 3\sqrt{2}(5 - \sqrt{2}) = 2 \cdot 5 - 2\sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\sqrt{2}$

$= 10 - 2\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 6 = 4 + 13\sqrt{2}$

↑ Agrupamos términos semejantes.

c. $(2 + \sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$

d. $(6 + \sqrt{2}) \cdot (6 - \sqrt{2}) = 6(6 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(6 - \sqrt{2}) = 36 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{2} = 36 - 2 = 34$

Observa que el último resultado no tiene radicales. Esto se debe a que es el producto de la suma de dos números por su diferencia, que da como resultado la diferencia de los cuadrados: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Y esto, en el caso de una raíz cuadrada, conlleva la eliminación de la raíz. También se podía haber resuelto de esta manera:

$$(6 + \sqrt{2}) \cdot (6 - \sqrt{2}) = 6^2 - (\sqrt{2})^2 = 36 - 2 = 34$$

Decimos que una suma de radicales y su diferencia son expresiones conjugadas.

Así, $a + b$ es la expresión conjugada de $a - b$ y, recíprocamente, $a - b$ es la expresión conjugada de $a + b$.

Al multiplicar dos expresiones conjugadas desaparecen las raíces cuadradas que pudieran existir.

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

Y TAMBIÉN:

La expresión conjugada de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

14. Efectúa.

a. $(2 + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{3}$

b. $\sqrt{11} \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{3})$

c. $\sqrt{7} \cdot (9 + \sqrt{2})$

d. $\sqrt{5} \cdot (3 + \sqrt{5})$

15. Calcula.

a. $(11 + \sqrt{2})^2$

b. $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$

c. $(\sqrt{10} - \sqrt{17}) \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{17})$

d. $(7 - \sqrt{21}) \cdot (7 + \sqrt{21})$

16. Escribe la expresión conjugada de cada una de estas expresiones:

$2 + \sqrt{3}$; $3 - 5\sqrt{2}$; $1 - \sqrt{2}$; $\sqrt{3} - 5$

—**Multiplícala** cada expresión por su conjugada.

Actividades

Prohibida su reproducción

Y TAMBIÉN:

Entre dos números racionales cualesquiera hay infinitos números racionales.
Cuando un conjunto cumple esta propiedad, decimos que es **denso**.

1.8. Potenciación de números reales con exponente racional

A las potencias de exponente racional las definimos mediante radicales del modo siguiente.

La potencia de base un número real a y de exponente un número racional m/n se define como la raíz de índice n y radicando a^m .

Así, observamos que los radicales pueden expresarse como potencias de exponente racional y viceversa. En los siguientes ejemplos, aprenderemos cómo se transforman mutuamente unos en otros.

Y TAMBIÉN:

Propiedades de las operaciones con potencias de exponente entero

- Multiplicación de potencias de la misma base
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- División de potencias de la misma base
 $a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a > 0)$
- Potencia de un producto
 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- Potencia de una potencia
 $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Expresa como potencias de exponente racional.

a. $\sqrt[3]{-12}$

b. $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$

Apliquemos la definición.

a. $\sqrt[3]{-12} = (-12)^{\frac{1}{3}}$

b. $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{5}}$

Ejemplo 5

Expresa en forma de radical.

a. $124^{\frac{1}{4}}$

b. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

Apliquemos la definición.

a. $124^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{124}$

b. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

Ejemplo 6

A las potencias de exponente racional las definimos de manera que las propiedades de las potencias de exponente entero continúen siendo válidas. Así, para operar con potencias de exponente racional, aplicaremos las propiedades que se recogen al margen. **Fíjate** en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7

Calcula:

a. $(2 + a)^3 \cdot (2 + a)^{\frac{1}{4}} \cdot (2 + a)^{\frac{3}{2}}$

b. $(-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} : (-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$

c. $(-9 \cdot a \cdot b2)^{\frac{3}{11}}$

d. $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}}$

Apliquemos las propiedades de las operaciones con potencias.

a. $(2 + a)^3 \cdot (2 + a)^{\frac{1}{4}} \cdot (2 + a)^{\frac{3}{2}} = (2 + a)^{3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}} = (2 + a)^{\frac{19}{4}}$

b. $(-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} : (-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = (-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}} = (-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{7}{6}}$

c. $(-9 \cdot a \cdot b2)^{\frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}} \cdot a^{\frac{3}{11}} \cdot b^{2 \cdot \frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}} \cdot a^{\frac{3}{11}} \cdot b^{\frac{6}{11}}$

d. $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{15}{8}}$

Prohibida su reproducción

1.9. Intervalos de números reales

Puesto que el conjunto de los números reales está ordenado, podemos hablar de los números reales **comprendidos** entre dos números reales determinados. Estos números se corresponden con un segmento de la recta real y constituyen lo que denominamos un **intervalo**.

Según contengan o no los extremos, se tienen los siguientes tipos:

Y TAMBIÉN:

El símbolo $\bullet$ indica el extremo contenido por el intervalo y el símbolo $\circ$, el no contenido.

Intervalos		
Cerrado	Abierto	Semiabierto
El intervalo cerrado de extremos a y b , $a < b$, es el conjunto de todos los reales comprendidos entre a y b , incluidos los extremos. Se representa por $[a, b]$.	El intervalo abierto de extremos a y b , $a < b$, es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b , excluidos los extremos. Se representa por (a, b) .	El intervalo semiabierto de extremos a y b , $a < b$, es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b y que contiene solamente uno de los extremos. Se representa por $(a, b]$ o $[a, b)$, según el extremo que contenga sea el derecho o el izquierdo.
		 
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

■ Tabla 8

La **distancia** entre los extremos a y b y, en general, la distancia entre dos números reales a y b es el valor absoluto de su diferencia: $d(a, b) = |a - b|$

Así, la distancia entre -4 y 5 es: $d(-4, 5) = |-4 - 5| = |-9| = 9$

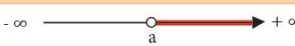
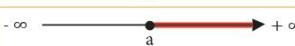
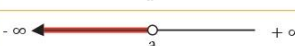
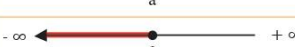
Intervalos infinitos

A los intervalos que en uno de sus extremos tienen el símbolo ∞ los llamamos **intervalos infinitos**, y los correspondemos con semirrectas de la recta real.

Y TAMBIÉN:

El símbolo $+\infty$ (más infinito) no representa ningún número real. Lo utilizamos para indicar un valor mayor que cualquier número real.

De la misma manera, al símbolo $-\infty$ (menos infinito) lo utilizamos para indicar un valor menor que cualquier número real.

Intervalo	Representación
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	

■ Tabla 9

Observa que si los dos extremos son infinitos obtenemos la recta real: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

1.10. Operaciones con intervalos, unión e intersección

Como los intervalos en la **recta real** son conjuntos de números, las operaciones entre ellos se realizan aplicando los mismos procedimientos de operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica, complemento, leyes de Morgan, etc. Los resultados de las operaciones con intervalos se pueden expresar en notación de intervalo, en notación de conjunto o gráficamente.

Y TAMBIÉN: ¿?

Unión e intersección de conjuntos

- Llamamos **unión** de dos conjuntos A y B , y escribimos $A \cup B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

- Llamamos **intersección** de dos conjuntos A y B , y escribimos $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

- Llamamos **diferencia** de dos conjuntos A y B , y escribimos $A - B$ o $A \setminus B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \{1, 2, 3\} \text{ y } B = \{2, 4, 6\}$$

entonces:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A - B = \{1, 3\} \text{ o } A \setminus B = \{1, 3\}$$

- Llamamos **conjunto vacío** a aquel que no tiene elementos. Lo representamos con el símbolo $\emptyset$.

Unión e intersección de intervalos

Puesto que los intervalos son conjuntos de números, podemos utilizar los símbolos $\cup$ y $\cap$ para expresar el conjunto formado por varios intervalos ($\cup$) o el conjunto de los puntos que son comunes a varios intervalos ($\cap$). Veamos un ejemplo.

Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$, escribimos los intervalos correspondientes a estos conjuntos y expresamos, mediante intervalos, $A \cup B$, $A \cap B$, $B - \{1\}$ y $A \cap B - \{1\}$.

Tenemos:

$$A = (-\infty, 4)$$

$$B = (-2, +\infty)$$

Los intervalos pedidos son, respectivamente:

$$A \cup B = (-\infty, 4) \cup (-2, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$A \cap B = (-\infty, 4) \cap (-2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\} = (-2, 4) = E_3(1)$$

$$B - \{1\} = (-2, +\infty) - \{1\} = (-2, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$A \cap B - \{1\} = (-2, 4) - \{1\} = (-2, 1) \cup (1, 4) = E_3^*(1)$$

Ejemplo 9

21. **Ordena** de menor a mayor los siguientes números:

$$-1 \quad 9 \quad \frac{1}{3} \quad -\sqrt{2} \quad \pi \quad \sqrt{3}$$

22. **Escribe** el conjunto de números reales que corresponden a cada uno de los siguientes intervalos y represéntalos:

$$(-\sqrt{2}, 3); (0, 5]; \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]; \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right]; (4, +\infty)$$

23. **Expresa** los intervalos que corresponden a estos gráficos:

—Halla $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$

$$A = (-6, -4) \cup (-2, 7)$$

$$B = (-6, 2] \cup (3, 7)$$

$$C = (-6, -4) \cup (5, 7)$$

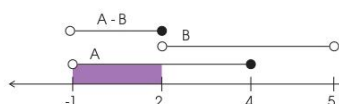
Actividades

Prohibida su reproducción

1.11. Operaciones con intervalos, diferencia y complemento

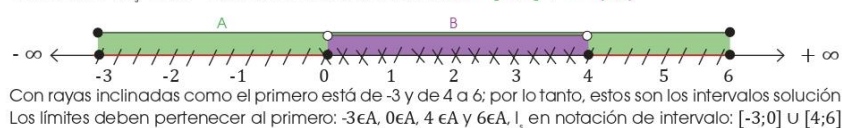
La operación **diferencia** de dos intervalos es otro intervalo que contiene los elementos que pertenecen al primero pero NO al segundo. Gráficamente, a la solución la encontramos localizando los intervalos en una recta real y resaltando el primero con líneas inclinadas en un sentido y el segundo con líneas en sentido contrario. El intervalo solución (I_s) corresponde a la parte «rayada» con la inclinación del primero.

Si $A = (-1; 4]$ y $B = (2; 5)$. Calculamos $A - B$



Ejemplo 10

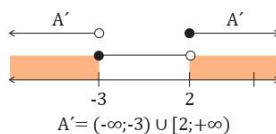
Calculemos el I_s de: $A - B$ (Leemos A diferencia B), si $A = [-3, 6]$ y $B = (0, 4)$



Ejemplo 11

La operación **complemento** de un intervalo es otro intervalo que contiene los elementos que le faltan para completar el conjunto universal, que en este caso es la recta real. Gráficamente, a la solución lo encontramos al localizar el intervalo en una **recta real** y resaltar los faltantes con líneas en el mismo sentido. El intervalo solución corresponde a la parte «rayada».

1. Si $A = [-3; 2]$. Calculamos A'



2. Hallemos el A' del intervalo: $A = [2, 5]$



Ejemplo 12

24. **Calcula:**

- | | | | |
|------------------------------|----------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| a. $(-\infty, 3) - (-7; -4)$ | c. $(-1; 0) - (2; 3)$ | e. $(-6, 8) \cup (-2, 9)$ | g. $[-3, 7] \cap (-2, 8)$ |
| b. $(-2; 2] - (1; 6)$ | d. $(-\infty; 2) - [1; 3]$ | f. $[-3, 2] \cap (3, 8)$ | h. $(-4, 4] \cup (-\infty, 1)$ |

25. Sea $A = [-3, 10]$ y $B = (-1, 12]$, **halla:**

- | | | | | | |
|---------------|---------------|------------|------------|-------------|-------------|
| a. $A \cup B$ | b. $A \cap B$ | c. $A - B$ | d. $B - A$ | e. $A' - B$ | f. $B' - A$ |
|---------------|---------------|------------|------------|-------------|-------------|

Actividades

Prohibida su reproducción

2. LOGARITMOS

Seguramente habrás oído hablar de una propiedad de las sustancias llamada pH.

Si una sustancia tiene pH igual a 7 decimos que es neutra, si su pH es mayor que 7 decimos que tiene carácter básico y si es menor que 7, carácter ácido.

Al pH definimos como el negativo del **logaritmo** de la concentración de iones hidrógeno, cambiado de signo. El hidrógeno es un tipo de átomo; la concentración es la cantidad que existe en un volumen de disolución, pero, ¿qué es el **logaritmo**?

El logaritmo es un concepto matemático relacionado con las potencias.

Observa esta tabla. Si tenemos la base y el exponente de una potencia, podemos calcular rápidamente el valor de dicha potencia.

Base	Exponente (a)	Potencia (x)
10	1	10
10	2	100
10	3	1 000
10	0	1
10	-1	0,1
10	-2	0,01

■ Tabla 10

Sin embargo, en determinados cálculos con potencias, lo que nos interesa conocer es el exponente al que hay que elevar la base para obtener la potencia.

Llamamos **logaritmo en base 10 de un número real x** a otro número real a de manera que $10^a = x$. Lo expresamos como $\log_{10} x = a$, o simplemente $\log x = a$.

Así:

- Puesto que $10^2 = 100$, se tiene $\log 100 = 2$.
- Puesto que $10^{-1} = 0,1$, se tiene $\log 0,1 = -1$.

Observa que el logaritmo de una potencia de base 10 es igual al exponente de la potencia:

$10^a = x \Leftrightarrow \log x = a$						
x	10	100	1 000	1	0,1	0,01
log x	1 puesto que $10^1 = 10$	2 puesto que $10^2 = 100$	3 puesto que $10^3 = 1 000$	0 puesto que $10^0 = 1$	-1 puesto que $10^{-1} = 0,1$	-2 puesto que $10^{-2} = 0,01$

■ Tabla 11

28. **Calcula**, aplicando la definición, los siguientes logaritmos.

- a. $\log 10 000$; b. $\log 10$; c. $\log 10^2$; d. $\log 0,0001$; e. $\log 1 000 000$

—**Comprueba** que estos resultados son iguales a los que obtienes utilizando la calculadora.

Y TAMBIÉN: ?

El concepto de pH aparece en diferentes productos. Por ejemplo, se acepta que para que el agua de una piscina sea apta para el baño, debe poseer un pH comprendido entre 7,2 y 7,4; un limpiador tiene pH básico; el jugo de una fruta pH ácido...

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$$

Y TAMBIÉN: ?

Los logaritmos de base 10 también reciben el nombre de **logaritmos decimales**. El logaritmo decimal de x, $\log x$, es el número al que debemos elevar 10 para que nos dé x.

$$10^a = x \Leftrightarrow \log x = a$$

CALCULADORA

Para calcular $\log 9$:

- Introducimos el número 9 y pulsamos la tecla **log**.

9 **log** **0.9542425**

El número 0,954 2425 que aparece en pantalla es el $\log 9$.

2.1. Cálculo de logaritmos

Veamos cómo puede calcularse el logaritmo de un número que no es potencia de 10; por ejemplo, $\log 9$.

$$10^a = 9 \Leftrightarrow \log 9 = a$$

Puesto que 9 no es una potencia de 10, no podemos calcular de forma inmediata su logaritmo. Así pues, obtendremos el resultado por ensayo-error, mediante **tablas de logaritmos**, o bien al utilizar una **calculadora**.

- Las **tablas de logaritmos** son tablas que permiten calcular el valor de cualquier logaritmo con una cierta precisión. Consisten en varias filas y columnas de números que expresan la parte decimal del logaritmo o mantisa. Su uso era habitual años atrás, antes de que se extendiera el uso de la calculadora científica. Hoy en día, han quedado en desuso.
- Actualmente, el sistema más empleado para calcular logaritmos es la calculadora científica, que nos permite calcular $\log 9$ de una manera rápida.

$$\log 9 = 0,954242\dots$$

2.2 Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos presentan una serie de propiedades que podemos deducir de su definición. **Fíjate** en la tabla siguiente.

Logaritmo de un producto	Logaritmo de un cociente
El logaritmo del producto de dos números reales x e y es igual a la suma de los logaritmos de dichos números. $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$ Demostración Sean a y b los logaritmos de x e y, respectivamente $\log x = a; \log y = b$ Por la definición de logaritmo, tenemos que: $\log x = a \Leftrightarrow x = 10^a; \log y = b \Leftrightarrow y = 10^b$ $x \cdot y = 10^a \cdot 10^b = 10^{a+b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \log(x \cdot y) = a + b = \log x + \log y$	El logaritmo del cociente de dos números reales x e y es igual a la diferencia de los logaritmos de dichos números. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ Demostración Sean a y b los logaritmos de x e y, respectivamente. $\log x = a; \log y = b$ Por la definición de logaritmo, tenemos que: $\log x = a \Leftrightarrow x = 10^a; \log y = b \Leftrightarrow y = 10^b$ $\frac{x}{y} = 10^a \cdot 10^{-b} \Rightarrow \log\left(\frac{x}{y}\right) = a - b = \log x - \log y$
Logaritmo de una potencia	Logaritmo de un cociente
El logaritmo de la potencia de base el número real x y exponente el número real y es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base. $\log x^y = y \cdot \log x$ Demostración Sean $a = \log x$ Por definición de logaritmo, tenemos que $10^a = x$. De aquí deducimos: $x^y = (10^a)^y = 10^{ay} \Rightarrow \log x^y = a \cdot y = y \cdot \log x$	El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz. $\log \sqrt[n]{x} = \frac{\log x}{n}$ Demostración Observa que si expresamos $\sqrt[n]{x}$ como $x^{\frac{1}{n}}$ y aplicamos la propiedad anterior, obtenemos: $\log \sqrt[n]{x} = \log x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log x = \frac{\log x}{n}$

■ Tabla 12

Prohibida su reproducción

Las propiedades de los logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de una expresión como sumas y restas de logaritmos.

Sepamos con un ejemplo cómo hacerlo.

Ejemplo 13

Expresamos como sumas y restas de logaritmos: $\log\left(\frac{7 \cdot x}{6}\right)^3$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{7 \cdot x}{6}\right)^3 &= 3 \log \frac{7 \cdot x}{6} = 3 \cdot [\log(7 \cdot x) - \log 6] \\ &= 3 (\log 7 + \log x - \log 6)\end{aligned}$$

2.3. Logaritmos en bases distintas de 10

Es posible calcular logaritmos que no sean decimales. Así, podemos plantearnos a qué potencia hemos de elevar 2 para obtener 8; es decir, cuál es el logaritmo en base 2 de 8.

$$\log_2 8 = ?$$

La respuesta será 3, porque $2^3 = 8$.

Podemos definir el **logaritmo en cualquier base positiva b** diferente de 10 de un número real x como otro número real a tal que:

$$b^a = x \Leftrightarrow \log_b x = a$$

Ejemplo 14

$$\log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$$

$$\log_5 0,04 = -2 \Leftrightarrow 5^{-2} = 0,04$$

$$\log_7 16\,807 = 5 \Leftrightarrow 7^5 = 16\,807$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Generalización de las propiedades

Las propiedades de los logaritmos son igualmente válidas si utilizamos una base distinta de 10.

Para una base b ($b > 0$, $b \neq 1$), las propiedades que hemos visto se escriben:

- $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b x^y = y \log_b x$
- $\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{\log_b x}{n}$

Y TAMBIÉN: ¿?

Podemos cambiar la base de los logaritmos utilizando la siguiente propiedad:

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

Así, si sabemos que $\log_{10} 5 = 0,699$ y $\log_{10} 3 = 0,477$, podemos calcular $\log_3 5$:

$$\begin{aligned}\log_3 5 &= \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \\ &= \frac{0,699}{0,477} = 1,465\end{aligned}$$

29. **Expresa** como sumas y restas de logaritmos.

a. $\log \frac{27a}{b}$

c. $\log \frac{5x}{7-x}$

e. $\log \left(\frac{10x}{9y}\right)^2$

b. $\log \left(\frac{3}{x}\right)^5$

d. $\log \left(\frac{27}{\sqrt{15z}}\right)$

f. $\log \sqrt{\frac{8x}{9}}$

30. Si $\log a = 3$ y $\log b = 4$, **calcula**:

a. $\log (a \cdot b)$

c. $\log a^2$

b. $\log \frac{a}{b}$

d. $\log_a b$

Actividades

Prohibida su reproducción

4. ECUACIONES E INECUACIONES

4.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto

Una ecuación de valor absoluto es aquella que tiene la incógnita dentro de un valor absoluto.

Valor absoluto de un número real x , se escribe $|x|$, es el mismo número x cuando es positivo o cero, y opuesto de x , si x es negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La resolución de ecuaciones de primer grado con valor absoluto, requiere de dos procedimientos (Caso 1 y Caso 2), en que utilizamos las mismas leyes de una ecuación lineal normal.

Para eliminar el símbolo del valor absoluto cuando entre las barras hay una expresión en una variable debemos tomar en cuenta los valores de la variable que hacen que la expresión sea positiva y los valores de este literal en que la expresión sea negativa.

Las soluciones de una ecuación de la forma $|ax + b| = c$, donde $a \neq 0$ y c es un número positivo, son aquellos valores que satisfacen: $ax + b = c$ ó $ax + b = -c$.

Propiedades que ayudan a resolver ecuaciones

La idea de resolver ecuaciones con valores absolutos es transformar el problema en resolver ecuaciones sin valor absoluto. Para ello aplicaremos la definición y propiedades que enunciaremos a continuación:

- Para cualquier número real x :
- Para cualesquiera números reales x y a :

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x|^2 = x^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

$$f. |x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 & \textcircled{i} \\ x = a \text{ y/o } x = -a & \textcircled{ii} \end{cases}$$

Caso 1 Caso 2

Primero, trataremos ecuaciones con un solo valor absoluto y con la variable dentro del valor absoluto como $|x + 2| = 5$ o $|2x - 5| = 15$.

Resolvamos la ecuación: $|2x - 5| = 15$

Apliquemos la propiedad f:

- La primera desigualdad es obvia ($15 \geq 0$), por $\textcircled{i}$
- Por $\textcircled{ii}$, tenemos dos casos para analizar:

Caso 1 ($x = a$)

Caso 2 ($x = -a$)

si $2x - 5 = 15$ entonces $x = 10$

si $2x - 5 = -15$ entonces $x = -5$

Así, el conjunto solución de la ecuación resulta ser $S = \{-5, 10\}$

En este caso, el conjunto solución resulta ser un conjunto finito.

Ejemplo 17

Prohibida su reproducción

43. **Resuelve** las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

- $|3x - 5| = 4$
- $|5x - 3| = \frac{2}{3}$
- $\left| \frac{3x - 2}{2} + 5 \right| = 10$
- $\left| \frac{x + 3}{4} - \frac{1}{2} \right| = 3$

Actividades

43

El método que aplicaremos también puede ser extendido a ecuaciones en que la variable también está fuera del valor absoluto como: $|2 - 3x| = x + 4$.

Ejemplo 18

Resolvamos la ecuación: $|2 - 3x| = x + 4$.

Al aplicar la propiedad f, tenemos las siguientes opciones.

$$|2 - 3x| = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0, \text{ por } \textcircled{i} \\ |2 - 3x| = x + 4 \end{cases} \quad \text{Caso 1}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{0} \\ |2 - 3x| = -(x + 4), \text{ por } \textcircled{ii} \end{cases} \quad \text{Caso 2}$$

Para la desigualdad $\textcircled{i}$, claramente x tiene que ser mayor que 4.

$$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \Rightarrow x \in [-4, +\infty[, \text{ llamemos al intervalo anterior } I.$$

Para $\textcircled{ii}$, tenemos dos casos para analizar.

Caso 1

$$2 - 3x = x + 4$$

$$4x = -2$$

$$x = -1/2$$

Caso 2

$$2 - 3x = -x - 4$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Tanto $x = -1/2$ como $x = 3$, pertenecen al intervalo I cumplen la desigualdad $\textcircled{i}$.

La solución es: $S = \{x | |2 - 3x| = x + 4\} = \{-1/2, 3\}$.

Y TAMBIÉN:



Una fracción...

- No está definida si el denominador es cero.
- Es cero si el numerador es cero.
- Es positiva si el numerador y el denominador son de igual signo.
- Es negativa si el numerador y el denominador son de diferente signo.

44. **Resuelve** las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a. $|x - 1| = 2x - 1$

h. $3|x + 4| - 2 = x$

b. $2x + |x - 1| = 2$

i. $|5 - 2x| - 4 = 10$

c. $|3x + 7| = 5x + 13$

j. $3 - 2x + |1 + x| = -5 + 6x$

d. $|3x + 2| = 5 - x$

k. $\left| \frac{1}{4} + 2x \right| = \frac{-1}{2} - x$

e. $|5x + 4| = 2x + 1$

l. $|x - 1 + 2x - 3| = x + 2$

f. $|-6x + 1| = 4x - 7$

m. $|x - 6| = |5x + 8|$

g. $x + |1 + 2x| = -2$

n. $\left| \frac{1 + 4x}{3} - x \right| = 6$

Actividades

Y TAMBIÉN:

A una inecuación la verificamos solo para algunos valores de las variables.

Los valores numéricos para los cuales verificamos la desigualdad son las soluciones de la misma.

Resolver una inecuación consiste en hallar los valores numéricos para los cuales la desigualdad es verdadera.

4.2. Inecuaciones fraccionarias

Observa la siguiente inecuación: $\frac{x+5}{x^2} \geq 0$.

En ella aparece una fracción algebraica con una incógnita.

Para resolver este tipo de inecuaciones, seguiremos estos pasos:

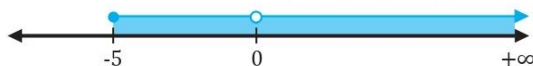
- En primer lugar, estudiaremos para qué valores de x el numerador y el denominador son positivos o negativos, teniendo en cuenta que el denominador no puede tomar el valor cero.

$$\begin{aligned} x+5 \geq 0 &\Rightarrow x \geq -5 \text{ y } x^2 > 0; x \neq 0 \\ &\Rightarrow x \geq -5 \text{ y } (x < 0 \vee x > 0) \end{aligned}$$

- A continuación, aplicaremos la regla de signos para la división, a fin de determinar qué valores de x cumplen la desigualdad.

En nuestro caso, el conjunto solución serán los valores de x que hagan cero o positivo el numerador, pues el denominador será positivo para cualquier valor de x , excepto el valor cero, que deberemos excluir, pues el denominador no puede anularse.

La solución sería el siguiente intervalo: $S = x \in [-5, 0) \cup (0, +\infty)$



Sea f una función tal que: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; determine el valor de x , para los cuales $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$

Comprensión

Se trata de una inecuación fraccionaria, así que deberemos comparar los signos del numerador y del denominador, excluyendo el valor que anula el denominador.

Resolución

Resolvamos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \rightarrow x_1 = -1 \\ x-2 &= 0 \rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

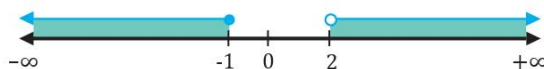
Estas soluciones definen tres intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Construyamos ahora la siguiente tabla para estudiar el signo que toman el numerador y el denominador. Para ello, basta con escoger un valor del intervalo y sustituir en las expresiones. En la última fila, apliquemos la regla de signos para la división.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x-2}$	+	0	-	No existe	+

En la última fila de la tabla, vemos que la fracción algebraica se anula en $x = -1$ y es negativa en el intervalo abierto $(-1, 2)$.

La solución de la inecuación es: $CS: x \in (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$.



TIC



La aplicación que encontrarás en el siguiente enlace resuelve sistemas lineales. Puedes utilizarla para comprobar si la solución de los ejercicios que resuelvas en la unidad es correcta: <http://links.edebe.com/jhck>

Y TAMBIÉN:



Las propiedades de las desigualdades del valor absoluto.

- $|x| \geq a$ si y solo si $x \leq -a$ o $x \geq a$
- $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$

TIC



Si accedes a la página <http://www.ematematicas.net/irracional.php?a=>, encontrarás una aplicación interactiva para practicar las ecuaciones irracionales.

4.3. Inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto

Una inecuación con valor absoluto es aquella en la que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma.

La forma general de una inecuación de primer grado con valor absoluto es $|ax+b| \geq c$, o todas sus equivalentes: $|ax+b| \geq c$, $|ax+b| < c$, o $|ax+b| > c$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Para resolver una inecuación con valor absoluto, aplicamos la definición de valor absoluto, que y en los casos en donde sea posible usar alguna de las propiedades estudiadas, con el objetivo de facilitar el procedimiento de resolución

Las propiedades de las desigualdades con valor absoluto quedan de estas formas:

a. $|x - a| \geq b$ equivale a: $x - a \leq -b$ ó $x - a \geq b$

b. $|x - a| \leq b$ equivale a: $-b \leq x - a \leq b$

Resolvamos la desigualdad: $|2x + 8| \geq 4$

$$2x + 8 \leq -4 \quad \text{ó} \quad 2x + 8 \geq 4$$

$$2x \leq -4 - 8 \quad 2x \geq 4 - 8$$

$$x \leq \frac{-12}{2} \quad x \geq \frac{-4}{2}$$

$$x \leq -6 \quad x \geq -2$$

El conjunto solución total está dado por la unión de las soluciones parciales, pues todos los valores comprendidos en estos intervalos cumplen con la desigualdad propuesta.

Solución: $(-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$

Ejemplo 20

Ejemplo 21

Resolvamos: $|x - 5| \leq 2x + 2$.

De acuerdo con la propiedad b, la desigualdad en valor absoluto es equivalente a la siguiente desigualdad: $-(2x + 2) \leq x - 5 \leq 2x + 2$ para resolverla, la trataremos como dos casos separados.

Caso 1: $-(2x + 2) \leq x - 5$. Despejando x tenemos.

$$-2x - 2 \leq x - 5$$

$$-2x - x \leq -5 + 2$$

$$-3x \leq -3$$

$x \geq \frac{-3}{-3}$ o bien, $x \geq 1$; el sentido de la desigualdad cambia al multiplicar o dividir por una cantidad negativa

Caso 2: $x - 5 \leq 2x + 2$. Despejamos x .

$$x - 5 \leq 2x + 2$$

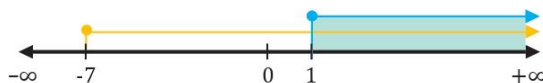
$$x - 2x \leq 2 + 5$$

$$-x \leq 7$$

$$x \geq -7$$

Ahora, la solución de la desigualdad $|x - 5| \leq 2x + 2$, es la intersección de las soluciones de los dos casos.

La intersección de $x \geq 1$ y $x \geq -7$ es el intervalo, $[1, +\infty)$.



Prohibida su reproducción

UNIDAD 2

CONTENIDO:

- Concepto de función • Función afín
- Función potencia entera negativa con $n = -1, -2$
- Operaciones con funciones reales
- Modelos matemáticos con funciones cuadráticas.

I. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Las relaciones funcionales están presentes en todas las ramas de las ciencias. La razón es porque describen multitud de fenómenos de nuestro entorno, en los que se relacionan magnitudes: tiempo y espacio, longitud y superficie.

Llamamos **función** a una relación de dependencia entre dos conjuntos, A y B : en la que a cada elemento x del conjunto A le corresponde, a lo sumo, un único elemento y del conjunto B .

Para referirnos a una función f , que relaciona dos conjuntos A y B , utilizaremos la notación habitual en la literatura matemática:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Y TAMBIÉN: ¿?

El origen de la palabra **función** se debe al matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Para Leibniz, una curva estaba formada por un número ilimitado de tramos rectos infinitamente pequeños.



<https://goo.gl/nqZvH2>

Generalmente, las funciones son relaciones de un conjunto de números reales con otro conjunto de números reales.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

¿Se te ocurren funciones entre otro tipo de conjuntos?

Extraído del libro: Matemáticas I Bachillerato Editorial Edebe España

Si un elemento x del conjunto A se corresponde con un elemento y del conjunto B , decimos que y es la imagen de x por la función f , o que x es una preimagen de y .

El objetivo de esta unidad es estudiar los casos en los que tanto A como B son conjuntos de números reales. En este caso, decimos que **f es una función real de variable real**.

Considere la siguiente relación de números reales: $y = \sqrt{x}$; justifica si la relación $y = f(x)$, que se deriva de esta relación es función o no.

Comprensión: Debemos comprobar si se puede establecer una relación funcional entre el cuadrado de un número a y el mismo número a .

Resolución: La respuesta es que $y = f(x)$ no es una función, ya que cualquier número real positivo es el cuadrado de dos números de diferente signo, pero con el mismo valor absoluto.

Así, por ejemplo, $x = 16$ es cuadrado de $y = -4$ y de $y = 4$. Por lo tanto, 16 debería tener dos imágenes contradiciendo la definición de función.

Ejemplo 1

Representación de una función

Una relación funcional o función se puede expresar de varias formas: mediante una expresión verbal, una expresión algebraica, una tabla de valores o una gráfica.

	Expresión verbal	Expresión algebraica	Tabla de valores	Gráfica										
Descripción	Un texto puede indicarnos cómo se relacionan entre sí dos variables.	Describimos la relación entre las dos variables mediante una expresión algebraica.	Identificamos cada variable independiente con su variable dependiente, mediante una tabla.	Representamos en unos ejes de coordenadas todos los pares $(x, f(x))$.										
Ejemplo	A cada número real le corresponde su mitad más uno.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto y = f(x) = 0,5x + 1$ Aunque, si no existe confusión, se habla simplemente de: $f(x) = 0,5x + 1$	Es una tabla donde se toma una pequeña parte de los valores de la variable independiente <table border="1"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> </table>	x	0	2	4	6	$f(x)$	1	2	3	4	
x	0	2	4	6										
$f(x)$	1	2	3	4										

■ Tabla 1

Prohibida su reproducción

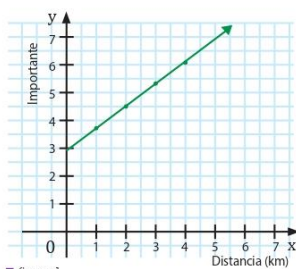


figura 1

2. FUNCIÓN AFÍN

Una empresa de mensajeros cobra por un encargo \$3 fijos por la reserva, más \$ 0,8 por kilómetro de trayecto.

Expresamos esta dependencia en la siguiente tabla de valores.

Distancia en kilómetros (x)	1	2	3	4
Importe en dólares (y)	3,80	4,60	5,40	6,20

Tabla 2

Y TAMBIÉN:

El primero en construir una función fue Galileo (1564-1642). Desde lo alto de la torre inclinada de Pisa tiró dos bolas, una de hierro y otra de madera y comprobó que a pesar de la diferencia de peso, ambas llegaban al suelo a la vez; había descubierto la Ley de Caída de los Cuerpos. Continuando su estudio y empleando un curioso artilugio, comprobó que el espacio recorrido depende del cuadrado del tiempo, escribiendo la primera función de la historia.

Tomado de <http://goo.gl/OgRfht>

La gráfica de esta función es una semirrecta, cuyo punto inicial es el punto de coordenadas (0, 3). El valor de la ordenada de este punto, 3, es la *ordenada en el origen*.

Observa que cuando la variable x incrementa su valor en 1, 2 y 3 unidades, se produce un incremento de la variable y de 0,8, 1,6 y 2,4 unidades, respectivamente.

El cociente entre el incremento de la variable y con relación al incremento de la variable x es un valor constante igual a 0,8.

$$\frac{0,8}{1} = \frac{1,6}{2} = \frac{2,4}{3} = 0,8$$

Este valor constante que se representa por m es la *pendiente* y mide la inclinación de la semirrecta respecto al semieje positivo de abscisas.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,8$$

La expresión algebraica de esta función es $y = 0,8x + 3$.

Decimos que f es una **función afín definida** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

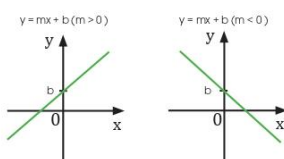


figura 2

Una función afín es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx + b$ ($m \neq 0$), siendo b la ordenada en el origen. Su gráfica es una recta que pasa por el punto (0, b) y tiene *pendiente* m .

- El perímetro de un triángulo equilátero, y , en función de la longitud de su lado, x , viene determinado por la expresión algebraica $y = 3x$.
 - Construye** una tabla de valores y **representa** gráficamente dicha función.
 - Indica** qué tipo de función has representado.
 - Determina** la pendiente.
 - Calcula** el perímetro del triángulo equilátero, cuyo lado mide 8 cm.

- El alquiler de un carro viene dado por un precio fijo de \$ 25 y se cobra \$ 5 por cada 10 km de recorrido.
 - Construye** una tabla de valores y **representa** la gráfica.
 - Indica** qué tipo de función has representado.
 - Determina** la pendiente y la ordenada en el origen.
 - Si se recorren 60 km, ¿cuánto costará el alquiler del carro?

Actividades

Prohibida su reproducción

4. FUNCIÓN POTENCIA ENTERA NEGATIVA CON $n = -1, -2$

Una **función potencia** es una función de la forma $f(x)=x^n$, ($n \in \mathbb{Z}$, fijo) en donde el exponente n es un número real fijo.

Si el exponente es negativo, estamos en presencia de **funciones potenciales de exponente entero negativo** y las escribimos de la forma: $f(x)=1/x^n$ o $f(x)=x^{-n}$.

Dependiendo de los valores de n (par o impar), las características de las funciones varían tanto en su dominio como en su recorrido.

Estudiaremos las dos funciones de potencia entera negativa más relevantes:

1. cuando $n = -1$
2. cuando $n = -2$

4.1. Función potencia entera negativa con $n = -1$

Se trata de una **función de proporcionalidad inversa**. Esta función expresa la relación entre dos variables inversamente proporcionales.

Ejemplo 2

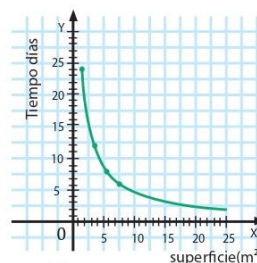
El tiempo que tarda en llenarse una piscina está en función de la superficie que tenga la boca del grifo.

Si expresamos esta dependencia mediante una tabla de valores, observamos que al multiplicar por una constante la superficie de la boca, el tiempo de llenado queda dividido por la misma constante. Se trata, pues, de dos magnitudes inversamente proporcionales.

Superficie en cm^2 (x)	2	4	6	8
Tiempo en días (y)	24	12	8	6

Se observa que el producto de un par de valores correspondientes es siempre el mismo. Dicho producto corresponde a la **constante de proporcionalidad inversa**. $2 \cdot 24 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 48$.

En general, $x \cdot y = 48$; es decir, la expresión algebraica de esta función es: $y = \frac{48}{x}$.



En nuestro ejemplo, las dos variables solo pueden tener valores positivos y la gráfica de esta función es una curva situada en el primer cuadrante de los ejes de coordenadas, que denominamos **rama de una hipérbola**.

En general, una función de proporcionalidad inversa está definida para cualquier valor de la variable x distinto de 0, ya que no es posible la división para 0.

Una **función de proporcionalidad inversa** es una función cuya expresión algebraica es de la forma $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), siendo k la constante de proporcionalidad inversa. La gráfica de la función es una curva, con dos ramas denominada **hipérbola**.

4. **Determina** la constante de proporcionalidad inversa y **escribe** la expresión algebraica de cada una de las funciones definidas por estas tablas de valores:

a.

x	1	2	3	4	5	6
y	60	30	20	15	12	10

b.

x	2	3	5	-6	-10	-15
y	-15	-10	-6	5	3	2

Actividades

Representación gráfica

Ejemplo 3

Veamos ahora la función definida por la siguiente expresión algebraica: $y = \frac{2}{x}$

A partir de la expresión algebraica, deducimos que las variables son inversamente proporcionales, con una constante de proporcionalidad inversa $k = x \cdot y = 2$.

La tabla de valores correspondiente es:

x	1	2	3	-1	-2	-4
y	2	1	$\frac{2}{3}$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

Las ramas de la hipérbola están en el primer y el tercer cuadrante, puesto que la constante de proporcionalidad inversa es positiva. Esto indica que las variables x e y tienen el mismo signo.

Consideremos ahora la función cuya expresión algebraica es: $y = -\frac{2}{x}$

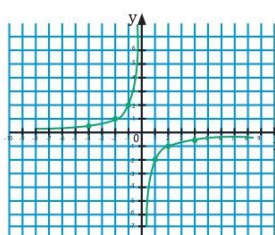
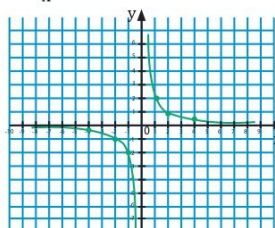
A partir de la expresión algebraica, se deduce que las variables también son inversamente proporcionales, con una constante de proporcionalidad inversa $k = x \cdot y = -2$.

Confeccionamos la correspondiente tabla de valores.

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$

La gráfica de esta función es, pues, una **hipérbola**.

A diferencia de la anterior, esta curva tiene una de sus ramas en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto, ya que la constante de proporcionalidad inversa es negativa. Esto indica que las variables x e y tienen distinto signo.



La gráfica de una función de proporcionalidad inversa es una **curva** con dos ramas denominada hipérbola.

Si la constante de proporcionalidad inversa es positiva ($k > 0$), es decir, si las dos variables tienen el mismo signo, las ramas de la hipérbola se encuentran situadas en el primer y el tercer cuadrante.

Si la constante de proporcionalidad inversa es negativa ($k < 0$), las dos variables tienen signo contrario y las ramas de la hipérbola están en el segundo y el cuarto cuadrante.

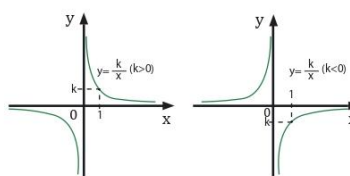


figura 4

5. **Representa** gráficamente las funciones obtenidas en la página anterior.

Actividades

63

Prohibida su reproducción

4.2. Función potencia entera negativa con $n = -2$

Una función potencia entera negativa tiene la forma $y = x^{-2}$ o $y = \frac{1}{x^2}$, y su representación gráfica es:

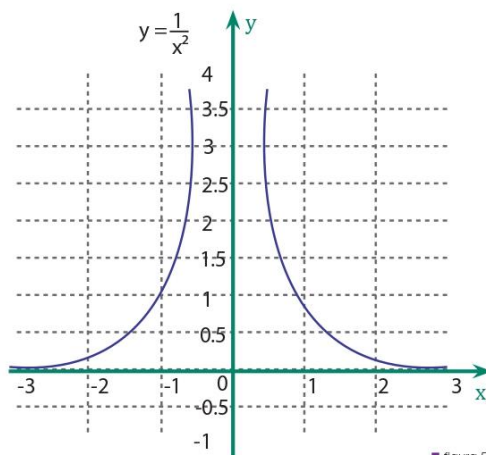


figura 5

A partir de esta gráfica podemos deducir las propiedades de la función: $y = \frac{1}{x^2}$

- Dominio: $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
- Recorrido: $y > 0$
- Simetrías: $f(-x) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.
- Asíntotas: $y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para toda x).

Sea f una función definida en un intervalo de $\mathbb{R}$, dicha función es convexa en el intervalo si todo segmento que une dos puntos de la gráfica queda por encima de la gráfica. En otras palabras una función es convexa si y solo si el conjunto de puntos situados en o sobre el gráfico es un conjunto convexo.

- La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, es convexa en los intervalos $(0, +\infty)$ y $(-\infty, 0)$, pero no es convexa en $(-\infty, +\infty)$, debido al punto $x = 0$.
- Crecimiento y decrecimiento:
crece de $(-\infty, 0)$; y decrece de $(0, +\infty)$.
- Es discontinua en $x=0$; ya que $f(0)$ no está definida.

Prohibida su reproducción

6. Di las propiedades y representa gráficamente la función:

a. $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$

b. $y = \frac{2}{x^2}$

c. $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

d. $y = \frac{3}{(x+1)^2} + 2$

Actividades

Y TAMBIÉN:

Las propiedades de la suma de funciones son:

- Asociativa:
 $(f + g) + h = f + (g + h)$
- Conmutativa:
 $f + g = g + f$
- Elemento neutro:
 $f + 0 = f$
 $0(x) = 0$ para todo $x \in D(f)$:
 $f + 0 = f$
- Elemento opuesto:
Dada una función $f(x)$, existe una función $-f(x)$ tal que:
 $f + (-f) = 0$

Las propiedades del producto de funciones son:

- Asociativa:
 $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$
- Conmutativa:
 $f \cdot g = g \cdot f$
- Distributiva de la suma:
 $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$
- Elemento neutro:
 $1(x) = 1$ para todo $x \in D(f)$:
 $f \cdot 1 = f$

8. OPERACIONES CON FUNCIONES REALES

Entre funciones reales de variable real, se pueden definir diversas operaciones.

8.1. Suma y resta de funciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son $D(f)$ y $D(g)$. La función suma, $f + g$, y la función diferencia, $f - g$, son funciones que asignan a cada número real x , la suma y la diferencia, respectivamente, de las imágenes por la función f y la función g :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in D(f) \cap D(g)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad \forall x \in D(f) \cap D(g)$$

El dominio de las funciones suma y diferencia es la intersección de los dominios de f y g :

$$D(f + g) = D(f) \cap D(g) \quad D(f - g) = D(f) \cap D(g)$$

8.2. Producto de funciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son $D(f)$ y $D(g)$. La función producto, $f \cdot g$, es la función que asigna, a cada número real x , el producto de las imágenes por la función f y por la función g :

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in D(f) \cap D(g)$$

El dominio de la función producto es la intersección de los dominios de f y g :

$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$$

Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{x-2}$ y $g(x) = x + 2$, calcule la función suma, la función resta y la función producto, y determine el dominio de cada una de ellas.

Comprensión: Obtenemos las funciones suma, resta y multiplicación, operando las expresiones analíticas, y para el dominio determinamos la intersección de ambos dominios.

Resolución:

$$\text{Suma: } (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{3}{x-2} + (x+2) = \frac{3 + x^2 - 4}{x-2} = \frac{x^2 - 1}{x-2}$$

$$\text{Resta: } (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{3}{x-2} - (x+2) = \frac{3 - x^2 + 4}{x-2} = \frac{7 - x^2}{x-2}$$

$$\text{Producto: } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{3}{x-2} \cdot (x+2) = \frac{3x+6}{x-2}$$

Para hallar el dominio, determinamos primero el dominio de las funciones f y g : $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $D(g) = \mathbb{R}$

El dominio será la intersección de ambos: $D(f + g) = D(f - g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{2\}$

Comprobación: Puedes dar diferentes valores a x y comprobar que, por ejemplo, $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$ y $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$.

Ejemplo 6

Prohibida su reproducción

8.3. Cociente de funciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son $D(f)$ y $D(g)$.

La función cociente de f y g , $\left(\frac{f}{g}\right)$, es la función que asigna, a cada número real x , el cociente de las imágenes por la función f y la función g , siempre que $g(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de la función cociente es la intersección de los dominios de f y g menos los puntos que anulan el denominador.

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

Y TAMBIÉN:

En la composición de funciones, se nombra en primer lugar la función de la derecha, porque es la primera en actuar sobre x :

$$(g \circ f)(x)$$

Se lee: « f compuesta con g ».

Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{2-x}$ y $g(x) = x+2$, calcula la función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)$ y determina su dominio.

Comprensión: Obtenemos la función cociente, operamos las expresiones analíticas y hallamos el dominio determinando la intersección de los dominios y los puntos que anulan a $g(x)$.

Resolución: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{3}{2-x}}{x+2} = \frac{3}{4-x^2}$

Para hallar el dominio, determinamos primero el dominio de las funciones f y g , y los puntos donde se anula $g(x)$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}; D(g) = \mathbb{R} - \{-2\}, \text{ ya que } g(-2) = 0$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = [D(f) \cap D(g)] - \{-2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Ejemplo 7

Actividades

10. Si $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x + 3$ y $h(x) = \frac{2}{(x+1)}$, halla:

- $f(x) + g(x)$
- $f(x) + h(x)$
- $h(x) - g(x)$
- $g(x) - h(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$
- $g(x) \cdot h(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$
- $\frac{f(x)}{h(x)}$

Prohibida su reproducción

Y TAMBIÉN:

Un polinomio en una indeterminada x es una expresión algebraica que puede reducirse a la forma:

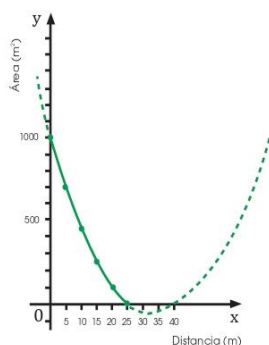
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.

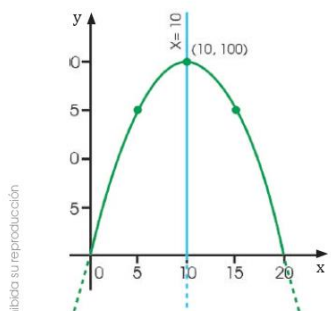
Una función polinómica viene dada por la expresión polinómica:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.



■ figura 10



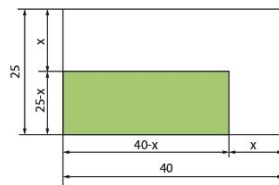
■ figura 11

Prohibida su reproducción

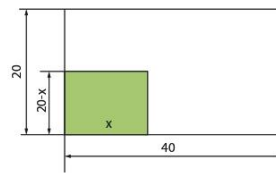
9. REPASO DE LA FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

Las funciones de segundo grado son **funciones polinómicas de grado dos**, cuya expresión algebraica es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$. Su representación gráfica es una **parábola** y son conocidas como **funciones cuadráticas**.

En este apartado repasaremos las funciones de segundo grado.



■ figura 12



■ figura 13

Una familia dispone de un terreno rectangular de 40 m de largo por 25 m de ancho.

Supongamos que desean edificar una superficie rectangular, en uno de los ángulos del terreno, y a igual distancia de los extremos, como se indica en la siguiente figura.

Si llamamos x a dicha distancia, podemos expresar la dependencia del área de la zona edificada, y , con relación al valor de x en la siguiente tabla de valores.

Distancia en metros (x)	0	5	10	15	20	25
Área en metros cuadrado (y)	1 000	700	450	250	100	0

Observa que el valor de x no puede ser ni mayor que 25 ni negativo.

La expresión algebraica de esta función viene dada por:

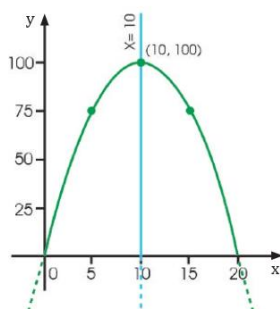
$$y = (40 - x) \cdot (25 - x) \Rightarrow y = x^2 - 65x + 1\,000$$

Decimos que es una función cuadrática y que su dominio es $(0, 25)$. Su gráfica es un trozo de parábola cuyas ramas están abiertas hacia arriba.

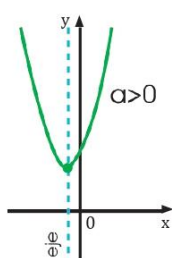
Consideremos, ahora, que desean edificar una superficie rectangular cuyo perímetro sea de 40 m.

El área de la zona edificada dependerá de las dimensiones del rectángulo, como puedes observar en la figura de la derecha.

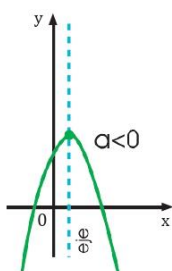
Si llamamos x a la base del rectángulo, la altura será $20 - x$, ya que el perímetro del rectángulo es de 40 m.



■ figura 14



■ figura 15



■ figura 16

Podemos expresar la dependencia del área de la zona edificada, y en relación con la longitud x de la base del rectángulo, en la siguiente tabla de valores.

Base del rectángulo en metros (x)	0	5	10	15	20
Área en metros cuadrado (y)	0	75	100	75	0

Observa que el valor de x no puede ser ni mayor o igual que 20 ni menor o igual que 0.

La expresión algebraica de la función viene dada por:

$$y = x \cdot (20 - x) \Rightarrow y = -x^2 + 20x$$

Se trata de una función cuadrática, cuyo dominio es $(0, 20)$.

Su gráfica es un trozo de parábola cuyas ramas están orientadas hacia abajo.

Observa que la figura 14 presenta un máximo absoluto en $x = 10$ y que es simétrica respecto a la recta $x = 10$. Decimos que el punto en el que se alcanza el máximo, es decir, el punto de coordenadas $(10, 100)$, es el vértice de la parábola y que la recta $x = 10$ es el eje de la parábola.

Una **función cuadrática** es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Su gráfica es una curva llamada parábola. Esta curva cumple las siguientes características:

- Si $a > 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba y el vértice de la parábola es el punto cuya abscisa es el mínimo absoluto de la función.
- Si $a < 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia abajo y el vértice de la parábola es el punto cuya abscisa es el máximo absoluto de la función.
- Es simétrica respecto de la recta paralela al eje OY que pasa por el vértice.

Esta recta es el eje de la parábola.

12. La base de un rectángulo excede en dos unidades a la altura. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función que nos da el área del rectángulo con relación a la longitud de la altura.

—**Determina** la expresión algebraica de dicha función.

13. Desde una altura de 2 m, lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. La altura de la pelota respecto al suelo en función del tiempo viene dada por la expresión: $h(t) = 2 + 30t - 5t^2$.

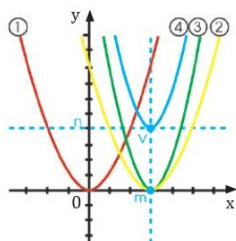
—**Construye** una tabla de valores para el intervalo de t entre 0 y 6 s, y representa gráficamente dicha función.

Actividades

Prohibida su reproducción

Y TAMBIÉN: ¿?

Observa en la siguiente figura, las transformaciones llevadas a cabo para la parábola $y = x^2$.



■ figura 17

Ecuación	Vértice
1. $y = x^2$	$(0, 0)$
2. $y = (x - m)^2$	$(m, 0)$
3. $y = a(x - m)^2$	$(m, 0)$
4. $y = a(x - m)^2 + n$	(m, n)
$a = k$	

9.1. Gráfica de la función cuadrática

La parábola es una curva simétrica respecto de su eje, que es la recta que pasa por su vértice y es paralela al eje OY.

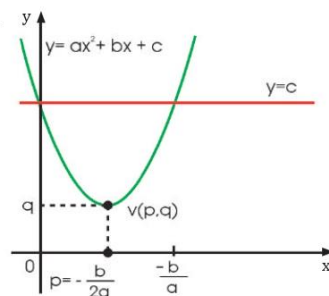
Elementos de la parábola

A continuación, mostraremos cómo podemos obtener analíticamente los elementos más característicos de la parábola, que resulta de representar gráficamente una función cuadrática, cuya expresión algebraica es:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Coordenadas del vértice

Observa la figura.



■ figura 18

Los puntos en que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta a la recta $y = c$, los obtenemos resolviendo el siguiente sistema.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases}$$

Podemos simplificar: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{b}{a}$

Por simetría, observamos que la abscisa del vértice es el punto medio p .

$$p = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Así pues, la abscisa del vértice, que coincide con la ecuación del eje de la parábola, es: $x = -\frac{b}{2a}$

Una vez obtenido el valor de la abscisa, lo sustituimos en la ecuación de la parábola para hallar el correspondiente valor de la ordenada del vértice; $q = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

14. **Calcula** las coordenadas del vértice de las siguientes funciones.

a. $y = 3x^2 - x + 1$

c. $y = -10x^2 - 5x + 7$

b. $y = 6x^2 - 2x + 9$

d. $y = 8x^2 + 8x - 11$

Puntos de corte con el eje OX

Observa la figura.

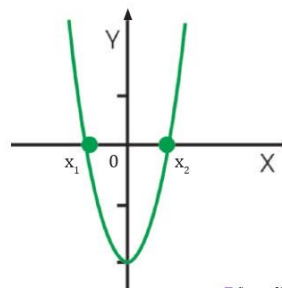
Los puntos de corte de la parábola con el eje OX son los puntos de coordenadas

(x, y) cuando $y = 0$. Además, sabemos que:

$$y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así, las coordenadas de los puntos de corte con el eje OX son de la forma $(x, 0)$, en los que el valor de x viene dado por las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Recuerda que si el discriminante de la ecuación de segundo grado es negativo, la ecuación no tiene solución y, por tanto, la parábola no corta el eje OX.



■ figura 19

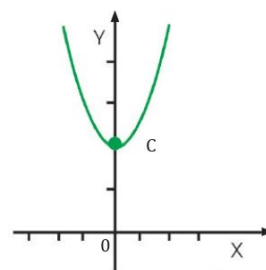
Punto de corte con el eje OY

Observa la figura.

El punto de corte de la parábola con el eje OY es el punto de coordenadas (x, y) cuando $x = 0$.

$$x = 0 \rightarrow y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

Por lo tanto, el punto de corte es el de coordenadas $(0, c)$.



■ figura 20

Encontrar las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = x^2 + 6x - 1$.

—Calculamos los puntos de corte con el eje OX. $y = 0$

$x^2 + 6x - 1 = 0 \Rightarrow$ aplicando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{40}}{2} = 0,16 \quad x_2 = \frac{-6 - \sqrt{40}}{2} = -6,16$$

$$x_1 = 0,16 \quad ; \quad x_2 = -6,16$$

La parábola corta el eje OX en los puntos $(0,16, 0)$ y $(-6,16, 0)$.

Calculamos los puntos de corte con el eje OY.

Cuando $x = 0 \rightarrow y = -1$

La parábola corta el eje OY en el punto $(0, -1)$.

Ejemplo 10

15. **Halla** analíticamente el vértice, el eje y los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las parábolas dadas por las siguientes funciones cuadráticas.

a. $y = 8x^2 - 2x$

c. $y = -x^2 - 2x + 1$

b. $y = x^2 - 2x$

d. $y = x^2 + 3$

Actividades

Prohibida su reproducción

Problemas resueltos



A

Modelos matemáticos con funciones cuadráticas

1. Un granjero dispone de 24 m de valla para cercar una parcela rectangular. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de la parcela para que el área encerrada sea la máxima?

Solución

- Vuelve a leer el enunciado.
- Anota los datos que dispones y los que te piden.

Planificación de la resolución

Observamos que existen muchas parcelas rectangulares cuyo perímetro es 24 m. (te mostramos algunas de ellas). Se trata de hallar, entre todas las posibles, la que tiene el área máxima.



Ejecución del plan de resolución

- a. Consideramos una parcela rectangular de base x y de altura y .

Puesto que el perímetro es 24 m, debe cumplirse:

$$2x + 2y = 24$$

O lo que es equivalente: $x + y = 12$

- b. El área de esta parcela será: $A = x \cdot y$

Como $x + y = 12$, se tiene $y = 12 - x$.

Si sustituimos y en la fórmula del área, resulta:

$$A = x \cdot y = x \cdot (12 - x) = -x^2 + 12x$$

- c. Finalmente, escribimos la función $f(x)$ que nos da el área de cada parcela en función de su base y la representamos gráficamente:

En la gráfica, se observa que esta función tiene un máximo en $x = 6$.

La altura del rectángulo será:

$$y = 12 - x = 12 - 6 = 6$$

El área será máxima cuando $x = 6$ e $y = 6$; es decir, cuando el rectángulo sea un cuadrado de 6 m de lado

Revisión del resultado

Revisa los cálculos realizados tanto en las operaciones como en la representación gráfica de la función.

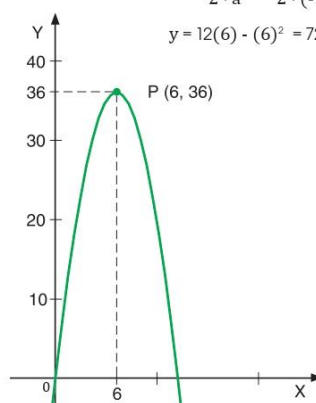
Comprueba que para los valores $x = 6$ e $y = 6$ el área es máxima.

Como el área de la parcela es:

$y = (12 - x)$, x , es decir: $y = 12x - x^2$, en esta ecuación se puede observar que el valor de a es -1 , por tanto, la gráfica es una parábola que abre hacia abajo, siendo así el vértice (altura), donde está el punto máximo. Luego, hallamos las coordenadas del vértice:

$$h = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-12}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12}{-2} = 6$$

$$y = 12(6) - (6)^2 = 72 - 36 = 36$$



Prohibida su reproducción

UNIDAD 3

CONTENIDO:

- Vectores fijos
- Vectores equipolentes
- Vectores libres
- Operaciones con vectores

I. VECTORES

Existen magnitudes, como la masa, la longitud o la temperatura, que quedan totalmente determinadas a partir de un número real (o escalar) y una unidad de medida. Decimos que son **magnitudes escalares**.

Sin embargo, hay magnitudes como la fuerza o la velocidad que para determinar las completamente han de indicarse su módulo, su sentido y su dirección. A estas magnitudes las llamamos **magnitudes vectoriales**.

Las magnitudes vectoriales se representan mediante **vectores**.

Los vectores son muy importantes para estudiar fenómenos que suceden a nuestro alrededor. Con ellos podemos explicar, por ejemplo: ¿Por qué si elevamos una cometa cuando el viento está soplando en contra, y empezamos a correr para mantenerla en el aire, esta retrocede al punto en que la cuerda con la que la sostenemos, queda inclinada hacia atrás?

Para casos como este. Usamos los vectores para representar la velocidad que lleva la cometa y la velocidad del viento. Lo importante es ubicar los vectores en la dirección en la que se mueve cada uno, así:



Y TAMBIÉN:

Un **segmento** es un fragmento de recta limitado por dos puntos. A un segmento podemos asociarle una dirección, la de la recta que lo contiene, y una longitud, la distancia entre sus extremos.

Sin embargo, no podemos asociarle un sentido: los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ son el mismo segmento.

Para nombrar un segmento que une los puntos A y B, escribimos las dos letras que lo determinan y encima una barra: $\overline{AB}$.

Para nombrar un vector que une los puntos A y B, escribimos las dos letras que lo determinan y encima una flecha: $\vec{AB}$!!!.

1.1. Vectores fijos

Por dos puntos del plano, A y B, no coincidentes, pasa una única recta sobre la que se puede definir un segmento con origen y extremo en estos puntos.

Dados dos puntos A y B del plano, denominamos vector fijo de origen A y extremo B al par ordenado (A, B). Lo representamos por $\vec{AB}$.

Así, todos los vectores fijos tienen un módulo, una dirección y un sentido.

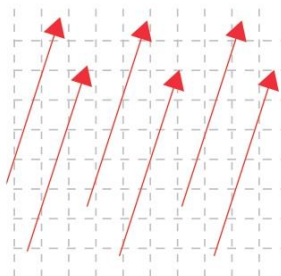
El módulo del vector $\vec{AB}$ es la longitud del segmento que lo determina. Lo representamos por $|\vec{AB}|$ y es siempre un valor positivo.

La dirección del vector $\vec{AB}$ es la de la recta determinada por A y por B.

El sentido del vector $\vec{AB}$ se define sobre la recta y va del origen del vector (punto A) al extremo (punto B).

1.2. Vectores equipolentes

Observa la figura. Dados un módulo, una dirección y un sentido, es posible determinar un vector tomando como origen cualquier punto del plano. Obtenemos así vectores equipolentes.



■ figura 1

Dos o más vectores fijos son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Y TAMBIÉN: ¿?

Dos vectores **paralelos** tienen la misma dirección.

Dos vectores pueden tener la misma dirección, pero distinto sentido $\vec{AB} \neq \vec{BA}$

Si el origen y el extremo de un vector coinciden, el vector es nulo.

Ejemplo 1

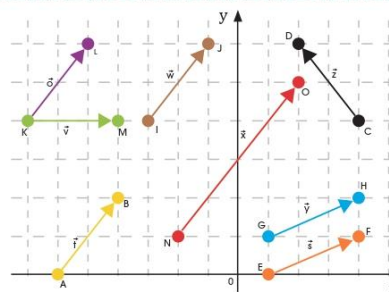
Indiquemos cuáles de estos vectores tienen el mismo módulo, cuáles tienen el mismo sentido y cuáles son equipolentes.

Resolución:

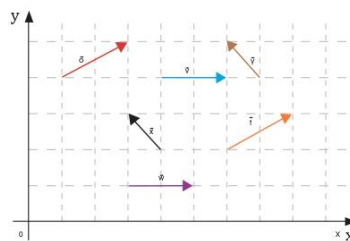
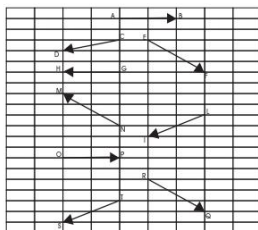
Los vectores $\vec{KL}$, $\vec{IJ}$, $\vec{AB}$, $\vec{NO}$ tienen el mismo sentido.

Los vectores $\vec{KL}$, $\vec{AB}$, $\vec{KM}$, $\vec{IJ}$ tienen el mismo módulo.

La pareja de vectores $\vec{IJ}$, $\vec{AB}$ y los vectores $\vec{KL}$, $\vec{GH}$, $\vec{EF}$ tienen el mismo módulo, el mismo sentido y la misma **dirección**.



1. **Indica** el origen y el extremo de cada uno de los vectores representados en la figura y **agrupalos** en conjuntos de vectores equipolentes y en conjuntos de vectores con el mismo módulo.
2. **Dibuja** dos vectores que sean equipolentes.
3. En la figura de abajo **indica** qué vectores son equipolentes:



Actividades

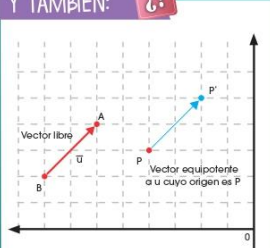
Prohibida su reproducción

1.3. Vectores libres

Un ejemplo de un vector fijo podría ser la fuerza que aplicamos sobre un punto determinado de una mesa.

No obstante, ten en cuenta que para definir dicha fuerza no necesitamos saber el punto exacto sobre el que la aplicamos, sino que tenemos suficiente con conocer su dirección, su sentido y su módulo.

Y TAMBIÉN: 



Existe una propiedad matemática denominada **propiedad fundamental** de los vectores libres:

Dado un punto P del plano cartesiano y un vector libre cualquiera $\vec{u}$, existe un único representante de $\vec{u}$ que tiene el origen en el punto P.

La relación de equipolencia nos permite clasificar el conjunto de vectores fijos del plano en colecciones de vectores que, desde el punto de vista matemático, se comportan como uno solo. Estas colecciones son los **vectores libres**.

Un **vector libre** es el conjunto formado por todos los vectores fijos equipolentes a uno dado.

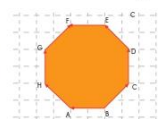
Cada uno de los vectores fijos que componen un vector libre es un representante de este vector.

A los vectores libres los representamos mediante letras minúsculas ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$) o encerrando entre corchetes uno de los vectores fijos que lo componen.

Así, el vector $[\vec{AB}]$ representa el vector libre formado por todos los vectores equipolentes a $\vec{AB}$.

Módulo, dirección y sentido de un vector libre

Los vectores fijos que determinan un vector libre, al ser equipolentes entre sí, tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.



El **módulo**, la **dirección** y el **sentido** de un vector libre son el módulo, la dirección y el sentido de cualquiera de sus representantes

TIC 

En el siguiente enlace, encontrarás más información acerca de los vectores fijos y los vectores libres:

<http://goo.gl/OxlvC9>

¿Cómo se demuestra la equipolencia de dos vectores? ¿Es siempre posible esta demostración?

Y TAMBIÉN: 

A el conjunto de todos los vectores libres del plano lo denominamos V_2 .

Observa detenidamente este octágono y anota todos los vectores fijos que ves representados. A continuación:

- Agrupar los vectores anteriores en conjuntos de vectores equipolentes.
- Indicar cuántos vectores libres hay representados.

Comprensión: Deberemos analizar la dirección y el sentido de los vectores fijos para determinar cuáles son equipolentes entre sí y, por lo tanto, poder indicar cuántos vectores libres hay representados.

Resolución: Los vectores fijos representados son $\vec{BA}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DE}$, $\vec{EF}$, $\vec{GF}$, $\vec{HG}$, $\vec{AH}$.

- Son equipolentes: $\vec{BA}$ y $\vec{EF}$; $\vec{BC}$ y $\vec{GF}$; $\vec{CD}$ y $\vec{HG}$; $\vec{DE}$ y $\vec{AH}$.
- Los vectores libres representados son $[(\vec{BA})]$, $[(\vec{BC})]$, $[(\vec{CD})]$, $[(\vec{DE})]$.

Ejemplo 2

1.4. Operaciones con vectores

Producto de un número real por un vector y suma

Observa cómo podemos efectuar operaciones con vectores gráficamente, utilizando el concepto de representante de un vector libre.

Producto de un número real por un vector

Llamamos producto de un número real k por un vector $\vec{u}$ y lo representamos por $k \cdot \vec{u}$ al vector libre que tiene:

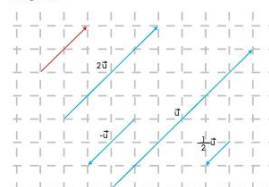
- Dirección:** La misma dirección que el vector $\vec{u}$.
- Módulo:** El módulo de $\vec{u}$ multiplicado por el valor absoluto de k .
- Sentido:** El mismo que $\vec{u}$ si k es positivo, y contrario a $\vec{u}$ si k es negativo.

Suma de vectores

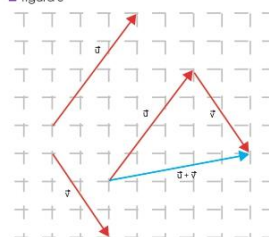
Llamamos **suma** de los vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la representamos por $\vec{u} + \vec{v}$, al vector libre que obtenemos con el siguiente procedimiento:

- Elegimos dos representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de modo que el extremo del primer vector coincida con el origen del segundo.
- Trazamos el vector cuyo origen es el origen del representante del primer vector y el extremo es el extremo del representante del segundo vector.

■ figura 2



■ figura 3



Ejemplo 3

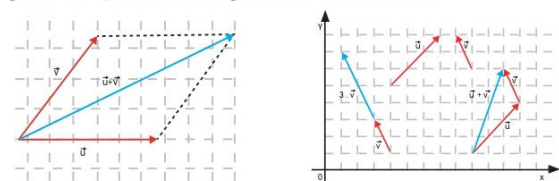
Dibujemos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y representemos los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $3 \cdot \vec{v}$.

Resolución:

Dibujamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, cual-quiera en el plano. Para sumarlos, situamos el vector $\vec{v}$, de modo que su origen coincida con el extremo del vector $\vec{u}$. Al unir el origen de $\vec{u}$ y el extremo de $\vec{v}$, obtenemos el vector suma. Para dibujar el vector $3 \cdot \vec{v}$, alargamos el vector $\vec{v}$, hasta que mida el triple.

Comprobación:

Podemos comprobar que las representaciones son correctas en un programa de representaciones gráficas, como GeoGebra.



Y TAMBIÉN: ¿?

Propiedades del producto de un número real por un vector

$\forall k, k' \in \mathbb{R}$, se cumple:

Propiedad asociativa:

$$k \cdot (k' \cdot \vec{u}) = (k \cdot k') \cdot \vec{u}$$

Propiedad distributiva respecto de la suma de vectores:

$$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$$

Propiedad distributiva respecto de la suma de escalares:

$$(k + k') \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + k' \cdot \vec{u}$$

Elemento neutro:

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot 1 = \vec{u}$$

Propiedades de la suma de vectores

Conmutativa:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Asociativa:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Elemento neutro: $\vec{0}$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

Elemento opuesto: $-\vec{u}$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

Prohibida su reproducción

Resta y combinación lineal de vectores

Para restar dos vectores, usamos el concepto de elemento opuesto de la suma. Por ello, dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener $\vec{u} - \vec{v}$, basta con construir el vector $-\vec{v}$, y sumarlo al vector $\vec{u}$. Así, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Observa que obtenemos el mismo resultado si utilizamos el procedimiento aplicado en la suma o si aplicamos la regla del paralelogramo.

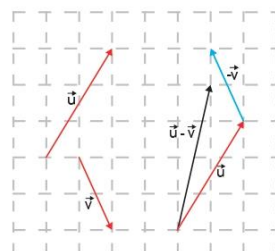


figura 4

Combinación lineal de vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con distinta dirección, podemos obtener otro vector $\vec{w}$, combinando las operaciones suma y multiplicación por un número real:

$$\vec{w} = -\alpha \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \quad \text{donde } \alpha \text{ y } \beta \text{ son números reales cualquiera.}$$

Decimos que el vector $\vec{w}$, es **combinación lineal** de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$.

Así, por ejemplo, el vector $\vec{w} = 3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Observa que el vector $\vec{0}$, es una combinación lineal de cualquier par de vectores, pues: $\vec{0} = 0 \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$.

Expresión de un vector como combinación lineal de otros dos

Dados dos vectores u y v , con distinta dirección, a cualquier otro vector del plano w podemos expresar como combinación lineal de u y v .

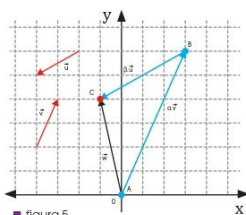


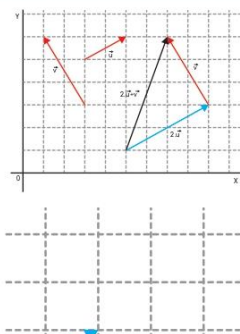
figura 5

Ejemplo 4

Dibujemos dos vectores cualquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y representemos el vector $w = 2\vec{u} + \vec{v}$.

Comprensión:

Dibujemos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, cualquiera en el plano. Primero, dibujemos $2 \cdot \vec{u}$, después desplazemos el vector $\vec{v}$, hasta el extremo de $2 \cdot \vec{u}$. Unamos el origen de $2 \cdot \vec{u}$ con el extremo de $\vec{v}$ y obtenemos el vector $2 \cdot \vec{u} + \vec{v}$.



Prohibida su reproducción

Y TAMBIÉN: ¿?

Es posible escribir combinaciones lineales de tantos vectores como se quiera. Así:

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + k_n \cdot \vec{u}_n$$

con $k_1, k_2, \dots, k_n$ números reales cualesquiera, es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots$.

Dos vectores son linealmente independientes si la relación:

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

solamente se cumple si α y β son ambos iguales a 0.

Gráficamente, en el plano, la condición necesaria para que dos vectores sean linealmente independientes es que tengan distinta dirección.

En caso contrario, decimos que son **linealmente dependientes** que, en el plano, es lo mismo que decir que tienen la misma dirección.

4. Dados estos vectores libres, **representa**:

- $2 \cdot \vec{u} + \vec{v}$
- $3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$

Actividades

UNIDAD 4

CONTENIDO:

- Ecuaciones de la recta -Distancias. Distancia entre dos puntos
- Repaso de conceptos básicos
- Tablas estadísticas datos no agrupados y de datos agrupados
- Medidas de dispersión

II. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos del plano se define de forma natural como la longitud del segmento que determinan.

Sin embargo, esta noción de distancia no es suficiente para determinar la que existe entre un punto y una recta o entre dos rectas paralelas, pues, en estos casos, hay infinitud de puntos implicados en el cálculo y deberemos saber cuál escoger.

La **distancia** entre dos elementos del plano es la mínima distancia que existe entre sus puntos..

Distancia entre dos puntos

Observa los puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ de la figura.

La distancia entre ellos es la longitud de la hipotenusa del triángulo EPQ. Por lo tanto:

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

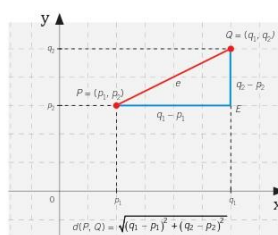


figura 5

Simétrico de un punto P respecto de otro punto Q

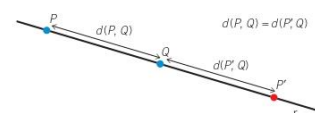


figura 6

El simétrico de P respecto de Q es el punto P' de la recta r que pasa por P y Q, tal que:

$$d(P, Q) = d(P', Q)$$

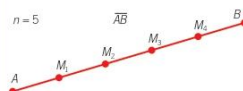
Por lo tanto, Q es el punto medio del segmento determinado por P y P'.

La distancia entre dos puntos nos servirá para determinar el punto simétrico de un punto respecto a otro.

Y TAMBIÉN: ¿?

Para dividir un segmento $\overline{AB}$ en n partes iguales, los $n - 1$ puntos de división ($M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$) se obtienen imponiendo:

$$\overline{AM_i} = \frac{i}{n} \overline{AB}, i = 1, \dots, n$$



Por ejemplo, si $n = 5$:

$$\overline{AM_1} = \frac{1}{5} \overline{AB} \quad \overline{AM_2} = \frac{2}{5} \overline{AB}$$

$$\overline{AM_3} = \frac{3}{5} \overline{AB} \quad \overline{AM_4} = \frac{4}{5} \overline{AB}$$

Si P y Q son dos puntos del plano:

$$d(P, Q) = |\overline{PQ}|$$

TIC

En el siguiente enlace encontrarás un applet de GeoGebra relacionado con el concepto de punto simétrico:

<http://links.edebe.com/g4havy>

— Investiga cómo se ha creado este applet e intenta crear uno parecido fijando otro elemento del plano.

Ejemplo 11

Demuestra que el triángulo de vértices $A = (2, -1)$, $B = (7, 2)$ y $C = (3, 3)$ es isósceles.

Comprensión: Calculemos las distancias entre los vértices. Si dos son iguales y otra es diferente, el triángulo es isósceles.

Resolución:

$$d(A, B) = \sqrt{(7 - 2)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(3 - 7)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

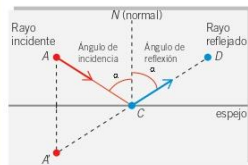
Por lo tanto, el triángulo es isósceles.

Comprobación: Si representamos el triángulo con un programa gráfico, comprobaremos que, efectivamente, es isósceles.

Prohibida su reproducción

Y TAMBIÉN:

Fuente luminosa puntual en un espejo plano:



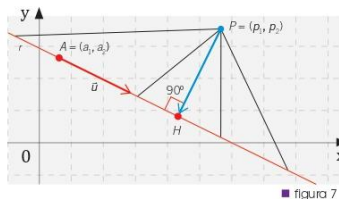
A', C y D (punto del rayo reflejado) están alineados.

12. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Según la definición de distancia, entre dos elementos del plano, esta debe ser mínima. Así, la distancia entre un punto y una recta estará relacionada con la perpendicular a esta que pase por el punto:

$$d(P, r) = d(P, H)$$

donde H es el pie de la perpendicular de P sobre r.



■ figura 7

Ejemplo 12

Calcula la distancia del punto $P = (5, 2)$ a la recta r que pasa por el punto $A = (2, -3)$, y tiene vector director $\vec{u} = (1, 4)$.

Comprensión: Buscaremos un vector normal a la recta r y, a partir de él, hallaremos la recta s perpendicular a la anterior que pase por P . Determinaremos el punto de intersección de ambas rectas H y aplicaremos la definición de distancia entre dos puntos: $d(P, H)$.

Resolución: Escribimos la ecuación de r en la forma paramétrica:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= -3 + 4t \end{aligned} \right\}$$

El vector director de s debe ser normal a la recta r . Si $\vec{u} = (1, 4)$ es el vector director de r , el vector $\vec{v} = (-4, 1)$ será un vector perpendicular; por lo tanto, podemos considerar que es el vector que buscamos.

Escribimos la recta s en su forma general (implícita):

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x + 4y - 13 = 0$$

Para calcular $H = r \cap s$, sustituimos las expresiones de la ecuación de r en la ecuación general de s :

$$2 + t + 4(-3 + 4t) - 13 = 0 \rightarrow t = \frac{23}{17} \rightarrow H\left(2 + \frac{23}{17}, -3 + 4 \cdot \frac{23}{17}\right) = \left(\frac{57}{17}, \frac{41}{17}\right)$$

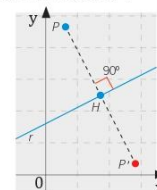
$$\text{Por lo tanto: } d(P, r) = d(P, H) = \sqrt{\left(\frac{57}{17} - 5\right)^2 + \left(\frac{41}{17} - 2\right)^2} = \frac{7\sqrt{17}}{17}$$

Simétrico de un punto P respecto de una recta r

El simétrico de P respecto de r es el punto P' , tal que:

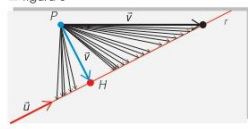
$$d(P, H) = d(P', H)$$

Por lo tanto, H es el pie de la perpendicular de P sobre r .



■ figura 9

■ figura 8



H es el punto de r que se encuentra a menor distancia de P .

Prohibida su reproducción

I. REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS

La estadística es la parte de las matemáticas que se ocupa de **recoger**, **organizar** y **analizar** grandes cantidades de datos para estudiar las características o el comportamiento de un colectivo.

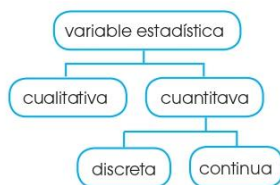
En todo estudio estadístico aparecen los siguientes conceptos básicos:

- Población: conjunto de los elementos que son objeto del estudio.
- Individuo: cada uno de los elementos de la población.
- Variable estadística: propiedad o característica de la población que estamos interesados en estudiar. Si esta característica toma valores numéricos, diremos que la variable es **cuantitativa**; en caso contrario, diremos que es **cualitativa**.

Las variables estadísticas suelen representarse por una letra mayúscula: X, Y, Z.

A continuación, puedes ver cuál es la población, los individuos y la variable estadística de diferentes estudios estadísticos realizados en una ciudad.

Estudio estadístico	Población	Individuo	Variable estadística
Medio de transporte que utilizan más frecuentemente sus habitantes.	Habitantes de la ciudad.	Cada uno de los habitantes.	Medio de transporte utilizado.
Número de cafés servidos en los bares a lo largo de un día.	Bares de la ciudad.	Cada uno de los bares.	Número de cafés servidos.
Tiempo medio diario que dedican sus habitantes a leer la prensa.	Habitantes de la ciudad.	Cada uno de los habitantes.	Tiempo medio dedicado a la lectura de la prensa.



Fíjate en que en los dos últimos estudios estadísticos, la variable es cuantitativa; sin embargo, los valores que toma la primera de ellas solo son números enteros (0, 1, 2, 3...), mientras que la segunda puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

Diremos que la primera es **cuantitativa discreta** y la segunda, **cuantitativa continua**.

1. **Indica** cuál es la población y la variable estadística de cada uno de los siguientes estudios estadísticos. **Señala**, además, de qué tipo es la variable estadística.
 - a. Preferencias deportivas de los alumnos de tu clase.
 - b. Tiempo medio invertido por los trabajadores españoles en desplazarse desde su domicilio hasta el centro de trabajo.
 - c. Número de veces, en un año, que asisten al teatro los habitantes de tu localidad.

2. MUESTRAS

Al efectuar un estudio estadístico, no siempre es posible observar la característica objeto del estudio en todos los individuos de la población.

Imagina que un diario quisiera elaborar un estudio sobre las preferencias literarias y musicales de los jóvenes ecuatorianos. Está claro que no puede preguntarse a todos los individuos, pues la población es **demasiado grande**.

En estos casos se toma solo una parte de la población, a la que llamamos **muestra**.

Para que el estudio estadístico sea fiable, la muestra ha de ser **representativa** del total de la población. Existen diferentes métodos para escoger una muestra, entre los que destacaremos dos:

- **Muestreo aleatorio simple:** cada elemento tiene la misma probabilidad de ser elegido.
- **Muestreo estratificado:** las proporciones de diferentes individuos deben ser las mismas en la muestra que en la población.

En ambos casos, resulta de fundamental importancia la elección del tamaño de la muestra. En términos generales, cuanto mayor sea este, mayor será, también, su fiabilidad.

Ejemplo 1

Se desea estudiar las preferencias literarias de los 950 alumnos de un centro escolar, de los que 570 son chicas. Explicar cómo obtener una muestra de 100 individuos:

- | | |
|---|---|
| a. Por muestreo aleatorio simple. | b. Por muestreo estratificado. |
| a. Una manera de obtener una muestra de 100 individuos por muestreo aleatorio simple es introducir en una urna 950 papeletas con el nombre de cada alumno en cada papeleta escoger al azar 100. | b. Si de los 950 individuos, 570 son chicas, la proporción de estas en el total de la población es del 60%. Así, para escoger una muestra de 100 individuos por muestreo estratificado, deberemos elegir 60 chicas y 40 chicos. |

- | | |
|--|---|
| 2. Investiga acerca del nivel de estudios de los habitantes de nuestra población. Una muestra de 50 personas elegidas al azar. Argumenta cuál de los siguientes métodos te parece más adecuado: | b. Pregunta a la gente que pasea un sábado por la tarde por la calle más céntrica. |
| a. Pregunta a los alumnos a la salida de un centro escolar. | c. Llamando a una lista telefónica de al menos 50 contactos. |
| | 3. Representatividad, coste y tiempo son factores que hay que considerar conjuntamente a la hora de decidir el tamaño de una muestra. ¿Por qué están interrelacionados? |

Y TAMBIÉN: ¿?

Estadística descriptiva y estadística inferencial

La rama de la estadística que solo pretende recoger, organizar y analizar los datos de un estudio estadístico se denomina estadística descriptiva.

Existe otra rama de la estadística que trabaja con muestras y pretende, a partir de estas, deducir (inferir) características de toda la población. Es la llamada estadística inferencial.



VEIT LUDWIG VON SECKENDORFF

Estadista e historiador alemán (1626-1692).

A mediados del siglo XVII surgen los primeros intentos de consolidar la estadística como una disciplina cuyo objeto era la descripción de los sucesos notables del Estado, gracias a V. L. von Seckendorff y a Conring, considerado el fundador.

G. Achenwall, discípulo de Conring, consolidó los postulados de esta nueva ciencia, a la que denominó Statistik. Dicho término apareció por primera vez en 1749 en su obra Staatsverfassung der heutigen vornehmsten europäischen Reiche und Völker im Grundrisse.

NS123M/006/12345

Actividades

Prohibida su reproducción

3. TABLAS ESTADÍSTICAS

Una vez recogidos los datos de un estudio estadístico debemos **ordenarlos**, para proceder, posteriormente, a su análisis. Con este fin, suelen utilizarse las **tablas de frecuencias**.

El proceso de elaboración de estas tablas depende de si agrupamos o no los datos en intervalos.

3.1. Tablas para datos no agrupados

Si la variable tiene pocos datos de diferente valor, procedemos del siguiente modo:

Valor	Recuento	Frecuencia absoluta (n)
2	☐	4
3	☒	5
4	☐	3
5	☐	4
6	☐	2

■ Tabla 1. Cantidad de hermanos de un grupo de 18 estudiantes de un colegio

—Construimos una tabla con tres columnas.

—En la primera columna, anotamos los diferentes valores que toma la variable, ordenados si estos son numéricos.

—En la segunda, trazamos un pequeño segmento cada vez que aparece un dato correspondiente a un determinado valor.

—En la tercera columna, anotamos, para cada valor, el número total de segmentos trazados. Este número es la **frecuencia absoluta (ni)** de dicho valor.

En el margen puedes ver la tabla de frecuencias (tabla 1) correspondiente cantidad de hermanos de un grupo de 18 estudiantes de un colegio: 3, 4, 6, 2, 3, 3, 2, 6, 5, 5, 2, 3, 4, 5, 2, 3 y 4.

3.2. Tablas para datos agrupados

Si la variable tiene muchos datos de distinto valor, antes de efectuar el recuento debemos agrupar los datos en intervalos.

69 58 54 40 71 61 57 52 64 56
52 61 54 50 63 55 51 30 70 60
54 58 54 47 63 69 58 54 49 70

Considera el conjunto de datos de este recuadro, correspondientes a las puntuaciones (en una escala de 0 a 100) obtenidas en un test psicotécnico por 30 aspirantes a un puesto de trabajo.

Veamos cómo proceder para efectuar la agrupación de estos datos en intervalos.

Procedimiento	Ejemplo
Busquemos el valor máximo y el valor mínimo que toma la variable y calculamos su diferencia. Este valor es el recorrido de la variable.	$71 - 30 = 41$
Decidamos el número de intervalos de clase en que agrupemos los datos (se suele tomar entre 5 y 10).	Tomemos 6 intervalos.
Determinemos la amplitud de cada intervalo. Para ello, dividamos el recorrido entre el número de intervalos elegido y aproximemos el resultado por exceso.	$41 : 6 = 6,83 \approx 7$
Formemos los intervalos de modo que el extremo inferior del primero sea algo inferior al menor valor que toma la variable y el extremo superior del último sea algo superior al mayor valor de la variable.	Extremo inferior del primer intervalo: 29,5 Intervalos: [29,5, 36,5), [36,5, 43,5), [43,5, 50,5), [50,5, 57,5), [57,5, 64,5), [64,5, 71,5). Extremo superior del último intervalo: 71,5

Prohibida su reproducción

208

Una vez efectuada la distribución en intervalos, elaboramos la tabla de frecuencias de forma parecida a como se hizo en el caso de datos no agrupados.

—Construimos una tabla con tres columnas.

—En la primera columna, anotamos los intervalos de clase calculados, ordenados de menor a mayor.

—En la segunda columna, trazamos un pequeño segmento cada vez que aparece un dato correspondiente a un determinado intervalo.

Intervalo	Recuento	Frecuencia absoluta (n_i)
[29,5, 36,5)		1
[36,5, 43,5)		
[43,5, 50,5)	□	3
[50,5, 57,5)	□ □	11
[57,5, 64,5)	□ □	9
[64,5, 71,5)	□	5

■ Tabla 2

—En la tercera columna, anotamos, para cada intervalo, el número total de segmentos trazados. Este número es la **frecuencia absoluta** (n_i) de dicho intervalo.

En el margen puedes ver la tabla de frecuencias correspondiente a las puntuaciones anteriores (tabla 2).

A veces, conviene añadir una columna entre la primera y la segunda, indicando en ella los puntos medios de los intervalos, denominados **marcas de clase**.

Intervalo	Marca de clase	Recuento	...
[29,5, 36,5)	33		
[36,5, 43,5)	40		
.....			

La tabla de frecuencias absolutas puede completarse con las frecuencias relativas y las frecuencias acumuladas de cada valor (o intervalo de clase si los datos están agrupados en intervalos). Recordemos sus definiciones:

- La **frecuencia relativa** (f_i) de un valor es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos.
- La **frecuencia absoluta acumulada** (N_i) de un valor es el resultado de sumar a su frecuencia absoluta las frecuencias absolutas de los valores anteriores.
- La **frecuencia relativa acumulada** (F_i) de un valor es el resultado de sumar a su frecuencia relativa las frecuencias relativas de los valores anteriores.

Así, la tabla 1 se completa como puedes observar a la derecha.

- Un equipo de baloncesto en 20 partidos ha anotado los siguientes puntos: 80, 101, 92, 80, 110, 83, 101, 75, 80, 107, 75, 85, 80, 110, 101, 92, 85, 110, 85, 80.

—**Construye** la tabla de frecuencias correspondiente.

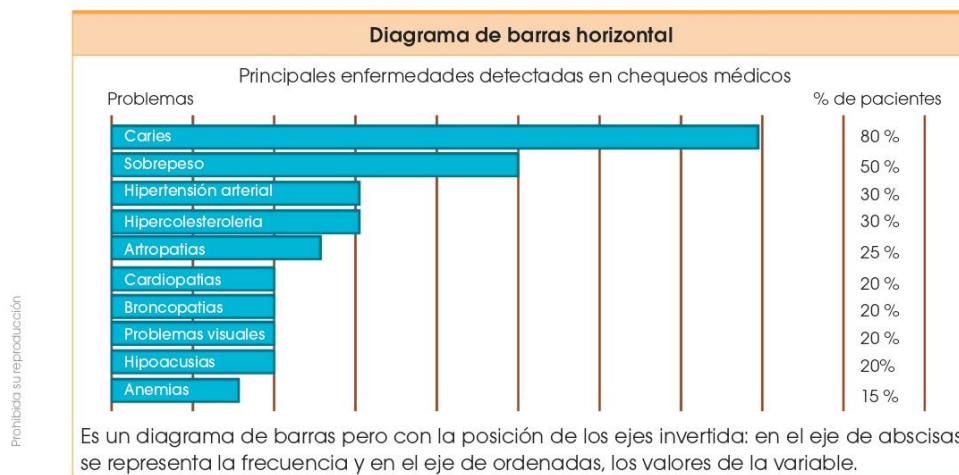
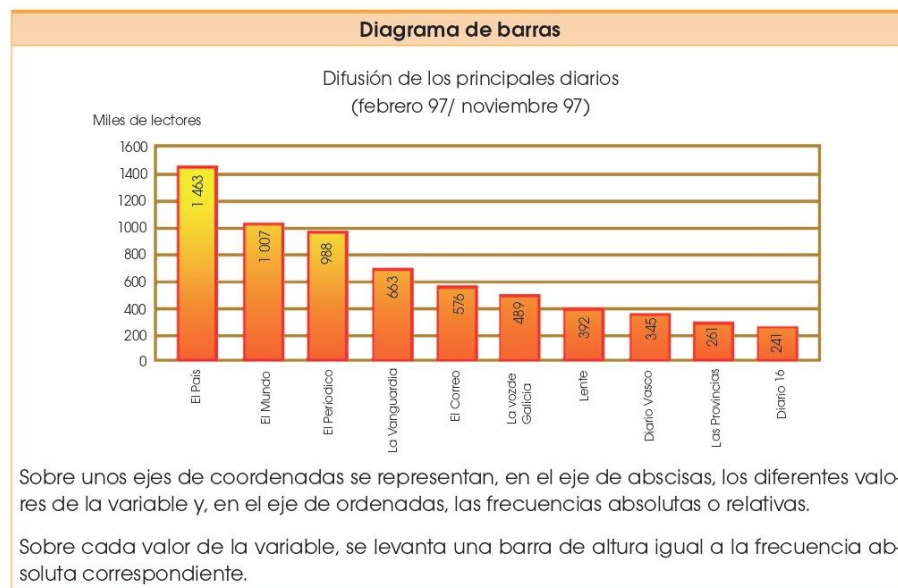
- Las calificaciones obtenidas por un grupo de 49 alumnos en una prueba son las siguientes: 3,0; 5,5; 4,4; 6,0; 4,3; 7,2; 4,7; 6,5; 6,7; 4,0; 5,9; 5,8; 1,4; 3,2; 5,8; 4,6; 4,1; 3,5; 6,8; 5,0; 5,9; 2,1; 4,2; 4,5; 4,1; 4,8; 2,8; 4,7; 7,7; 6,0; 3,0; 5,7; 4,5; 4,9; 3,3; 4,8; 4,7; 7,7; 6,0; 3,0; 5,7; 4,5; 4,9; 3,3; 4,8; 4,7; 5,2; 3,8; 6,1.

—**Agrupar** en siete intervalos los datos anteriores y construye la tabla de frecuencias correspondiente.

4. GRÁFICOS

La información contenida en las tablas estadísticas puede expresarse mediante gráficos estadísticos.

En caso de que los datos no estén agrupados los más empleados son:



Prohibida su reproducción

7. MEDIDAS DE DISPERSIÓN PARA DATOS NO AGRUPADOS

Los **parámetros de dispersión** de un conjunto de datos nos informan sobre la dispersión de los datos considerados, es decir, nos dicen si estos están más o menos separados.

Existen diferentes parámetros de dispersión. Los más utilizados son el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Recorrido

Es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la serie de datos. También se conoce como **rango** o **amplitud**, y se representa por r .

Así, si consideramos la serie de datos de la variable estadística que representa la edad de los 16 alumnos de un curso de astronomía, tenemos:

12 15 15 16 18 19 19 19 22 23 24 24 25 30 31 49

Por lo que el recorrido de esta serie de datos es:

$$r = 49 - 12 = 37$$

El recorrido es un parámetro fácil de calcular, pero que ofrece una información muy limitada. Así, nos da una idea de la amplitud del conjunto de datos, pero está muy influido por los valores extremos.

Desviación media.

La desviación media es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media. Se representa por D_m .

En general, escribimos abreviadamente: $D_m = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N}$ utilizar $D_m = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$

Ejemplo 5

Calculemos la desviación media de la distribución: 5, 3, 7, 8, 5, 8, 5, 7, 9, 3, 3

1. Calculemos la media aritmética del conjunto de datos:

$$\bar{x} = \frac{5 + 3 + 7 + 8 + 5 + 8 + 5 + 7 + 9 + 3 + 3}{11} = \frac{63}{11} = 5,7$$

2. Apliquemos la fórmula para calcular la desviación media:

$$D_m = \frac{|5 - 5,7| + |3 - 5,7| + |7 - 5,7| + |8 - 5,7| + |5 - 5,7| + |8 - 5,7| + |5 - 5,7| + |7 - 5,7| + |9 - 5,7| + |3 - 5,7| + |3 - 5,7|}{11}$$

$$D_m = \frac{1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3}{11} = \frac{21}{11} = 1,9$$

La desviación media se puede utilizar como medida de dispersión en todas aquellas distribuciones en las que la medida de tendencia central más significativa haya sido la media. Sin embargo, para las mismas distribuciones es mucho más significativa la desviación típica, que estudiaremos a continuación, y eso hace que el uso de la desviación media sea cada vez más restringido.

13. Son encuestados veinte matrimonios respecto a su número de hijos y se obtuvieron los siguientes datos:

2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 0 ; 2 ; 2 ; 3 ; 2 ; 6 ; 2 ; 3 ; 2 ; 2.

Halla la desviación media.

14. Los siguientes datos muestran el número de vuelos internacionales recibidos en el aeropuerto de la ciudad de Quito durante un mes, **construye** una tabla de distribución de frecuencias y **halla** la desviación media.

10, 15, 10, 16, 15, 12, 12, 10, 15, 12, 12, 16, 10, 13, 12, 11, 10, 11, 15, 15, 16, 14, 14, 14, 10, 11, 10, 15, 15, 16.

Varianza

Nos indica la variabilidad de los datos, es decir que tan alejados están los datos de su media.

Es la media aritmética de los cuadrados de las diferencias o desviaciones de cada dato hasta la media:

$$\text{Varianza poblacional (para una población): } \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Varianza muestral

$$(\text{para una muestra}): s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N-1} - \bar{x}^2$$

El símbolo σ es la letra griega sigma. Corresponde a la «s» de nuestro alfabeto.

Desviación típica o desviación estándar

Es sin duda la medida de dispersión más importante, ya que sirve como medida previa al cálculo de otros valores estadísticos.

La desviación típica se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media de la distribución. Es decir: la raíz cuadrada de la varianza.

$$\text{Para el caso de una población } \sigma = \sqrt{\frac{\sum |x - \bar{x}|^2}{N}}$$

$$\text{Para el caso de una muestra } s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6

La muestra obtenida de las puntuaciones en un examen por grupo de estudiantes es la siguiente: 6, 8, 10, 12, 14. Hallemos la desviación estándar de la muestra.

$$1. \text{ Hallemos la media del conjunto de datos: } \bar{x} = \frac{6+8+10+12+14}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

2. x	6	8	10	12	14
$ x - \bar{x} $	4	2	0	2	4
$ x - \bar{x} ^2$	16	4	0	4	16

$$\text{Luego } s = \sqrt{\frac{40}{4}}$$

= 40

15. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de estudiantes en un examen han sido las siguientes:

15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13.

- Construye** la tabla de distribución de frecuencias.
- Calcula** las medidas de tendencia central de los datos.
- Halla** la desviación típica.

16. El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por la siguiente serie:

3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 2, 3, 5, 2, 3, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 2, 4, 5.

- Construye** la tabla de distribución de frecuencias.
- Halla** la calificación promedio de los hoteles según la cantidad de estrellas.
- Calcula** la desviación típica.

Y TAMBIÉN: ¿?

Una fórmula alternativa para el cálculo de la varianza es:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

Para obtener la varianza a partir de esta expresión, completamos la tabla de frecuencias con las siguientes columnas:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$

Y TAMBIÉN: ¿?

Dos propiedades importantes de la varianza son:

- La varianza de una constante es cero.
- Si se tiene la varianza s^2 de un conjunto de datos y a cada observación se multiplica por una constante b, entonces la nueva varianza de los datos se obtiene multiplicando a la varianza de los datos por b^2 .

Actividades

Prohibida su reproducción

Y TAMBIÉN:

Utilizamos s para muestras pequeñas y σ para muestras grandes

Y TAMBIÉN:

La aplicación de los procedimientos estadísticos se remonta hacia el año 3050 a. C., cuando se efectuó en Egipto un registro de la población y la riqueza con el fin de preparar la construcción de las pirámides.

Posteriormente, egipcios, griegos y romanos, efectuaron algunos censos con fines tributarios, sociales y militares, y mucho más tarde, en el siglo XVI, se publicaron en Alemania, Italia y Francia inventarios estadísticos.

Aunque en un principio la estadística surge a partir de la elaboración de censos, actualmente se extiende su aplicación a numerosos campos, como la agricultura, la biología, la psicología, la enseñanza, etc.

Las temperaturas máximas en la ciudad de Esmeraldas durante el mes de junio fueron:

30 °C, 29 °C, 28 °C, 30 °C, 33 °C, 29 °C, 30 °C, 31 °C, 29 °C, 29 °C, 30 °C, 31 °C, 31 °C, 31 °C, 32 °C, 33 °C, 34 °C, 34 °C, 28 °C, 31 °C, 31 °C, 32 °C, 32 °C, 33 °C, 33 °C, 31 °C, 32 °C, 32 °C, 33 °C, 33 °C.



<http://goo.gl/mUfWGZ>

Ejemplo 7

Hallemos la desviación estándar de las temperaturas a su media

Solución:

- Se trata de una población porque nos dan las temperaturas de todo el mes, por tanto aplicaremos la fórmula de la desviación estándar para una población, es decir:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum |x - \bar{x}|^2}{N}}$$

- Calculemos la temperatura promedio, la media aritmética, para ello elaboramos la tabla de frecuencia:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$ x - \bar{x} $	$ x - \bar{x} ^2$
28	2	56	3	9
29	4	116	2	4
30	4	120	1	1
31	7	217	0	0
32	5	160	1	1
33	6	198	2	4
34	2	68	3	9
N =	30	935		28

$$\bar{x} = \frac{935}{30} = 31,17 \approx 31^\circ\text{C}$$

- Luego, sustituiremos en la fórmula los valores obtenidos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{28}{30}} = \sqrt{0,933} = 0,966$$

Prohibida su reproducción

- Los siguientes datos corresponden a una muestra de estaturas de los jugadores de un equipo de fútbol: 1,80; 1,70; 1,69; 1,70; 1,65; 1,75; 1,65; 1,80; 1,64

Calcula:

- Las medidas de tendencia central
- la desviación media
- la desviación estándar

Actividades

222

8. MEDIDAS DE DISPERSIÓN PARA DATOS AGRUPADOS

Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos, los parámetros de dispersión se calculan de esta manera.

Recorrido

En caso de que los datos estén agrupados en intervalos, suele considerarse como recorrido la diferencia entre el extremo superior del último intervalo y el extremo inferior del primero.

Desviación media, varianza y desviación típica: consideramos las marcas de clase de los diferentes intervalos como diferentes valores de la variable x_i y sus frecuencias absolutas como n_i .

Desviación media: Es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media aritmética. Se representa por d_m .

En general, escribimos abreviadamente:

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}| \cdot n_i}{N}$$

x_i : valor de la variable $\bar{x}$: media aritmética n_i : frecuencia absoluta de x_i N : número total de datos

Ejemplo 8

Calculemos el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la distribución de datos que recoge la tabla.

Solución

Intervalo de clases	[100, 120]	[120, 140]	[140, 160]	[160, 180]	[180, 200]	[200, 220]
n_i	5	6	15	18	17	5

Intervalos de clase	Marca de clase x_i	Frecuencia n_i	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot n_i$
[100, 120]	110	5	55,45	277,25
[120, 140]	130	6	35,45	212,70
[140, 160]	150	15	15,45	231,75
[160, 180]	170	18	4,55	81,90
[180, 200]	190	17	24,55	417,35
[200, 220]	210	5	44,55	222,75
	$N = 66$	$N = 66$		1443,70

$$d_m = \frac{1443,70}{66} = 21,87$$

—En este caso, puesto que los datos están agrupados por intervalos, el recorrido es la diferencia entre el extremo superior de último intervalo de clase y el extremo inferior del primer intervalo de clase. Luego, $r = 220 - 100 = 120$.

—Aplicamos la fórmula correspondiente para calcular la desviación media.

$$d_m = \frac{|110 - 165,45| \cdot 5 + |130 - 165,45| \cdot 6 + |150 - 165,45| \cdot 15 + |170 - 165,45| \cdot 18 + |190 - 165,45| \cdot 17 + |210 - 165,45| \cdot 5}{66} = 21,87$$

—Aplicamos la primera de las fórmulas para calcular la varianza.

$$\sigma^2 = \frac{|110 - 165,45|^2 \cdot 5 + |130 - 165,45|^2 \cdot 6 + |150 - 165,45|^2 \cdot 15 + |170 - 165,45|^2 \cdot 18 + |190 - 165,45|^2 \cdot 17 + |210 - 165,45|^2 \cdot 5}{66} = 712,67$$

—Puesto que $\sigma^2 = 712,67$ tendremos que la desviación típica es $\sigma = \sqrt{712,67} = 26,70$.

18. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana en la distribución de datos que aparece en esta tabla.

Intervalo de clases	[2, 8]	[8, 14]	[14, 20]	[20, 26]
n_i	6	14	7	3

Actividades

Prohibida su reproducción

CALCULADORA



Introducción de datos

- Ponemos la calculadora en modo estadístico **SD**.
- Borramos de la memoria los cálculos anteriores.
- Introducimos los datos, uno a continuación de otro, separados sólo por la tecla **DATA**:

X_1 **DATA** X_2 **DATA** ... X_n **DATA**

Si los datos están tabulados en una tabla de frecuencias, los introducimos de la siguiente manera:

X_1 **X** n_1 **DATA** X_2 **X** n_2 **DATA** ...
... X_k **X** n_k **DATA**

Obtención de parámetros estadísticos

- Para obtener la media aritmética, presionamos la tecla **$\bar{X}$** .
- Para obtener la desviación típica, presionamos la tecla **σ_x** .
- También podemos obtener otros resultados parciales: **σ_k** .

Número de datos: **n**

Suma de todos los datos: **ΣX**

Suma de los cuadrados de los datos: **ΣX^2**

9. MEDIDAS DE POSICIÓN

Hemos visto que la mediana de una distribución de datos es el valor que ocupa el lugar central (o el promedio de los valores centrales si el número de datos es par). Por tanto, este valor deja por debajo el 50% de los datos y por encima el otro 50%, es decir, divide la distribución en dos mitades iguales.

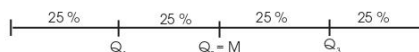
Podemos generalizar este concepto y considerar aquellos valores que dividen la distribución en cuatro partes iguales. Estos valores se denominan **cuartiles**.

—**Primer cuartil**: es el valor de la variable que deja por debajo el 25% de los datos. Se representa por Q_1 .

—**Segundo cuartil**: es el valor de la variable que deja por debajo el 50% de los datos. Se representa por Q_2 .

Es obvio que el segundo cuartil coincide con la mediana.

—**Tercer cuartil**: es el valor de la variable que deja por debajo el 75% de los datos. Se representa por Q_3 .



Para calcular Q_1 y Q_3 se procede de manera análoga a como se hizo para la mediana. En el caso de datos no agrupados, basta con observar la columna correspondiente a las frecuencias absolutas acumuladas.

Se tiene:

- Si existe un valor cuya frecuencia absoluta acumulada coincide con $\frac{N}{4}$, Q_1 es el promedio entre dicho valor y el siguiente. En caso contrario, Q_1 es el primer valor que tiene una frecuencia absoluta acumulada mayor que $\frac{N}{4}$.
- Si existe un valor cuya frecuencia absoluta acumulada coincide con $\frac{3N}{4}$, Q_3 es el promedio entre dicho valor y el siguiente. En caso contrario, Q_3 es el primer valor que tiene una frecuencia absoluta acumulada mayor que $\frac{3N}{4}$.

Si los datos están agrupados en intervalos, buscamos primero el intervalo que contiene al cuartil. Este será el primer intervalo con frecuencia absoluta acumulada mayor que $\frac{N}{4}$ en el caso de Q_1 o $\frac{3N}{4}$ en el caso de Q_3 . A continuación, sustituimos en la expresión correspondiente:

Siendo:

— L_i el extremo inferior del intervalo I que contiene a Q_1 (respectivamente a Q_3).

— h la amplitud de los intervalos de clase.

— N el número de datos.

— N_{i-1} la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a I .

— n_i la frecuencia absoluta del intervalo I .

$$Q_1 = L_i + h \cdot \frac{\frac{N}{4} - N_{i-1}}{n_i}$$

$$Q_3 = L_i + h \cdot \frac{\frac{3N}{4} - N_{i-1}}{n_i}$$

Prohibida su reproducción

224