Rafael Galeth
COLEGIO VIRTUAL INTENSIVO PCEI

10 Matemáticas

décimo año

www.colegiopceirafaelgaleth.com

Ministerio de Educación

Equipo Técnico
Enoc Felipe Quishpe Guano
Duraymi Huete Chávez

ISBN: 978-9942-22-414-9

Equipo Técnico de Editorial Don Bosco
Gerente General de Editorial Don Bosco
Marcelo Mejía Morales

Dirección Editorial
Paúl F. Córdova Guadamud

Editora de área
Angelina Gajardo Valdés

Autores
Valeria Arias Dousdebes
Christian Ronald Armendariz Zambrano

Diseño y diagramación
Pamela Alejandra Cueva Villavicencio
Alexander Castro Cepeda
Israel Ponce Silva
Juan Fernando Bolaños Enríquez

Ilustración
Marco Antonio Ospina Belalcázar
Archivo Editorial Don Bosco

Edición 2023

© Ministerio de Educación
Av. Amazonas N34-451 y Av. Atahualpa
Quito-Ecuador
www.educacion.gob.ec

La reproducción parcial o total de esta publicación, en cualquier forma y por cualquier medio mecánico o electrónico, está permitida siempre y cuando sea autorizada por el Ministerio de Educación y se cite correctamente la fuente.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

Ministerio de Educación

República del Ecuador

Ministerio de Educación

República del Ecuador

Esta obra es un extracto de título e ISBN 978-9942-22-419-9 del libro del Ministerio de Educación.
Todos los derechos le pertenecen al autor.

ÍNDICE DE CONTENIDOS DÉCIMO

UNIDAD 1

UNIDAD 1

CONTENIDO:

- Definición intuitiva de función
- Dominio y recorrido de funciones
- Funciones lineales
- Características de las funciones lineales- Gráfica de una función lineal

10
décimo
año

1.3. Definición intuitiva de función

D.C.D. M.4.1.46. Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas.

¿Qué es una *función*?

Seguramente has escuchado el término *función*, pero ¿sabes lo que significa realmente?

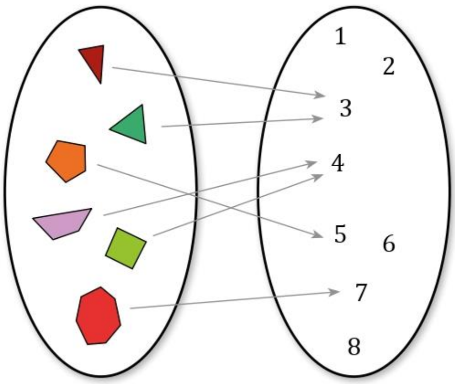
En la vida cotidiana, se dan situaciones en las que obtenemos relaciones de dependencia entre magnitudes.

Una magnitud se encuentra en función de otra si su valor depende de esa magnitud. Un ejemplo es el área de un círculo. Al área de un círculo la calculamos con la fórmula área = Esta fórmula depende del radio del círculo. Entonces, decimos que el área del círculo se encuentra en función de su radio.

De la misma manera sucede con la cantidad de megabyte (MB) en el saldo de un celular en relación con la cantidad de MB que utilizamos. Si una persona tiene 100 MB y se gasta 50 MB viendo videos, le quedan 50 MB. Este cálculo puede parecer básico, pero en realidad es una función simple.

A una función también la podemos ver como una lista de objetos de un determinado tipo a los cuales les corresponde otro objeto. A esta correspondencia la llamamos *función*.

A continuación, vemos una representación gráfica de esta idea.



La dependencia entre magnitudes puede expresarse mediante un enunciado verbal, una tabla de valores, una gráfica o una fórmula.

Una variable es aquella magnitud cuyo valor puede variar.

- Variable independiente es la que puede tomar valores arbitrarios.
- Variable dependiente es aquella cuyos valores dependen del valor que toma la variable independiente.

Consideremos, por ejemplo, esta situación:

Una empresa cobra un costo total por cercar cada terreno según el perímetro del mismo. El precio es de doce dólares el metro lineal de cerca.

- Las dos magnitudes que tienen dependencia entre ellas son: costo total y perímetro.

Además, la dependencia cumple estas propiedades:

- La variable perímetro puede tomar valores de forma arbitraria; por eso, la llamaremos *variable independiente* y la representaremos con la letra *x*.
- En cambio, los valores que toma la variable costo dependen de los valores de la variable *x*; por eso, la llamaremos *variable dependiente* y la representaremos con la letra *y*.

Concepto de función

Antes de dar a conocer el concepto de *función*, partiremos de un ejemplo práctico.

Un médico dispone de tres horas diarias para atender a sus pacientes y el número máximo de pacientes que puede atender en un día es de veinticinco. Por lo tanto, el tiempo que puede dedicar a cada uno depende del número de visitas. Existe una relación de dependencia entre el número de pacientes y el tiempo empleado en atenderlos. Podemos expresarla mediante esta tabla de valores.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Número de pacientes	5	10	15	20	25
Tiempo de visita (min)	36	18	12	9	7,2

Observemos que las magnitudes número de pacientes y tiempo de visita varían su valor en cada casilla. Por ello, denominamos *variables* a estas magnitudes.

Si llamamos *x* a la variable número de pacientes e *y* a la variable, vemos que:

1. La variable *x* puede tomar valores que son los números naturales hasta el 25.
2. Los valores de la variable *y* dependen de los valores de la variable *x*.
3. A cada valor de la variable *x* le corresponde un único valor de la variable *y*.

Por ello, *x* se denomina variable independiente e *y* es la variable dependiente.

Una función es una relación de dependencia entre dos variables, en la que a cada valor de la variable independiente x le corresponde un único valor de la variable dependiente y.
Así diremos que y está en función de x. La escribimos: $x = f(x)$.

Decimos que el tiempo de visita (y) en minutos está en función del número de pacientes (x) y lo simbolizamos por: $y = f(x)$.

Retomando el ejemplo de la página anterior de cercar el terreno:

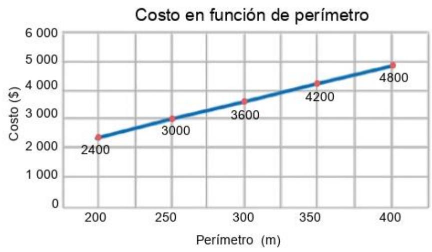
Una empresa cobra un costo total por cercar cada terreno según el perímetro del mismo. El precio es de doce dólares el metro lineal de cerca.

Elaboramos la tabla de valores:

Perímetro del terreno en m (x)	Costo total de la cerca en $ (y)
200	2 400
250	3 000
300	3 600
350	4 200
400	4 800

Ratificamos que la variable dependiente *y* es el costo total de la cerca, la variable independiente es el perímetro que está expresado en metros *x*.

Al ubicar los valores de la tabla en un plano cartesiano, en donde en el eje *x* se ubica el perímetro expresado en metros y en el eje *y* se ubican los costos expresado en dólares, resultaría:



En lenguaje matemático, podemos decir que:

y está en función de x.

Escribimos:

$$y = f(x)$$

Variable dependiente — Variable independiente

y es la variable dependiente.
x es la variable independiente.
Acostumbramos a representar las funciones con las letras minúsculas: *f*, *g*, *h*…

Presentamos el uso de funciones con variables independientes y dependientes que representan números reales. Tratamos la definición, formas de expresarla, tablas y gráficos.

1. En estos ejemplos vamos a identificar las variables independientes (VI) y las variables dependientes (VD).
   a. Los litros de gasolina comprados y el precio pagado.

      VI: Sería el número de litros de gasolina.

      VD: Sería el precio pagado.
   b. El resultado de asignar a un número su doble y sumarle tres unidades.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

c. El área de un círculo y el valor de su radio.

VI: Es el radio del círculo.

VD: Es el área del círculo.

d. La distancia recorrida por un coche y el tiempo empleado.

VI: Es el tiempo empleado.

VD: Es la distancia recorrida.

e. El costo de la mano de obra de un mecánico y las horas trabajadas.

VI: Son las horas trabajadas.

VD: Es el costo de la mano de obra.

f. La distancia de frenado de un carro y la velocidad que lleva.

VI: Es la velocidad.

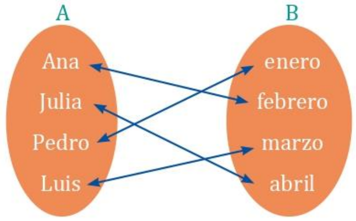
VD: Es la distancia de frenado.

g. El importe de la factura de la luz y el número de kilovatios consumidos.

VI: Son los kilovatios consumidos.

VD: Es el importe de la factura de luz.

2. Haciendo una lista con las personas integrantes de una familia y otra lista con los meses del año, dibujemos un diagrama desde el nombre de cada persona hasta el mes de su cumpleaños.



3. De las siguientes correspondencias identifiquemos cuál corresponde a una función y cuál no.

x	1	2	3	4
y	3	6	9	12

Esta regla de correspondencia corresponde a una función, ya que a cada elemento de la variable x le corresponde un único elemento de la variable y.

x	1	1	2	2
y	5	6	7	8

Esta regla de correspondencia no corresponde a una función, ya que un elemento de la variable x se relaciona con dos elementos de la variable y.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Esta regla de correspondencia corresponde a una función, ya que a cada elemento de la variable x le corresponde un elemento de la variable y; en este caso en particular, los elementos 1 y 4 de la variable y son imágenes de -1 y -2 respectivamente.

x	-2	-1	0	1	2
y	3	3	3	3	3

Trabajo individual

1. Considere la relación de dependencia que asigna a cada libro su número de páginas. ¿Se trata de una función? En caso afirmativo, diga cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
2. Indique cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente del par de variables relacionadas en cada uno de estos apartados:
   a. El costo de una llamada telefónica y el tiempo de duración.
   b. El importe de la factura de la luz y el número de kilovatios consumidos.
3. Escriba la expresión algebraica de la función f definida, en cada caso, por el criterio:
   a. Multiplica un número por 7 y restarle 4.
   b. Eleva la tercera parte de un número al cuadrado.
   c. Divide el doble de un número por 3 y sumarle 2.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

1.4. Dominio y recorrido de funciones

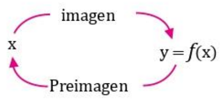
D.C.D. M.4.1. 47, 48. Definir y reconocer funciones lineales en *Z* crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica, tabla de valores y forma algebraica estableciendo relaciones con situaciones reales como alza de precios, ventas diarias, crecimiento de una planta, etc.

Imágenes y preimágenes

Consideramos de nuevo la función f, que relaciona el consumo de combustible de un automóvil con la distancia recorrida.

Cuando el automóvil ha recorrido 5 km, su consumo es de 40 cl. Decimos que la imagen de 5 por la función f es 40. Simbólicamente escribimos $f(5) = 40$.

También decimos que la antiimagen de 40 por la función f es 5.



La imagen de un valor x por una función f es el valor que toma la variable y en relación con el valor que tiene la variable x.
La preimagen de un valor y por una función f es el valor o valores de la variable x a los que corresponde el valor tomado por la variable y.

Volvamos a considerar la función f, que relaciona el consumo de combustible de un automóvil con la distancia recorrida.

Imaginamos que el trayecto recorrido por Beatriz es de 20 km. Es decir, la variable independiente distancia recorrida toma valores entre 0 km y 20 km.

Decimos que este intervalo de valores es el dominio de la función f. Lo simbolizamos de la forma:

$$D(f) = \{0, 1, 2, 3, ..., 19, 20\} = [0, 20]$$

El dominio de una función f es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. Lo representamos por $D(f)$.

La variable dependiente, combustible consumido, varía de 0 cl en el punto de partida a 160 cl en el punto de destino.

Decimos que este intervalo de valores es el recorrido de la función f. Lo simbolizamos de la forma:

$$R(f) = \{0, 1, 2, 3, ..., 159, 160\} = [0, 160]$$

El rango o recorrido de una función f es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, es decir, es el conjunto formado por todas las imágenes. Lo representamos por $R(f)$.

El dominio y recorrido se representa con intervalos, recuerda su representación gráfica.

	TIPO	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
FINITOS	Abiertos	a b
	Cerrados	a b
	Semiabiertos	a b
		a b

Trabajo individual

Lee y resuelve la siguiente actividad

1. El metro cuadrado de papel que se utiliza para empapelar una habitación de 40 m2 cuesta $ 3.
   a. Confecciona una tabla de valores y representa gráficamente la función que relaciona los metros cuadrados de pared con el importe.
   b. ¿Cuánto cuesta el papel necesario para empapelar toda la habitación?
2. Para ir a esquiar un día festivo con los compañe- ros y las compañeras de clase, alquilamos unos esquís. El precio del alquiler es de $ 12 diarios.
   a. Representa gráficamente la función que re- laciona el importe del alquiler según el nú- mero de horas diarias de uso de los esquís.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Expresión de una función

Hay muchas funciones que no se expresan mediante una fórmula algebraica. Una función puede expresarse de diferentes maneras: mediante un enunciado verbal, una tabla de datos, una expresión algebraica, expresiones analíticas o una gráfica.

Mundo Digital

Investigue cuánto recorre el carro que le lleva de su casa al trabajo por galón de gasolina y día. Registre los datos de una semana en una tabla.

Enunciado verbal

Mediante una frase, describimos cuáles son las variables dependiente e independiente, y qué dependencia existe entre ellas, como hemos visto en ejemplos desarrollados anteriormente.

Beatriz se desplaza con su automóvil. En el viaje consume 8 L de combustible por cada 100 km o, lo que es lo mismo, 8 cL por km (en este ejemplo la variable independiente es la distancia recorrida y la variable dependiente la cantidad de combustible consumido).

Expresión algebraica

La forma más habitual de expresar una función real de una variable es mediante una fórmula que relaciona la variable dependiente con la variable independiente.

En la función que tomamos como ejemplo, el automóvil consume 8 cL por cada kilómetro recorrido.

Distancia recorrida en km (x)	Combustible consumido en cℓ (y)
0	0
2	16
4	32
6	48
8	64
10	80
12	96
14	112
16	128
18	144
20	160

Si representamos por x la distancia recorrida, en kilómetros, y por y la cantidad de combustible consumido en cL, podemos escribir esta fórmula: $y = 8x$, o también, $f(x) = 8x$.

Una función puede expresarse de forma algebraica con una fórmula que indica las operaciones que debemos efectuar con cada valor de la variable x para obtener el valor correspondiente de la variable y.

Una función suele expresarse dando, además de la expresión algebraica, su dominio y su recorrido.

Recordamos que el dominio de la función del ejemplo es $D(f) = [0, 20]$ y el recorrido, $R(f) = [0, 160]$.

Así, la función anterior puede simbolizarse de esta manera:

$$f\colon\ D(f) \longrightarrow R(f)$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

$$f\colon\ [0, 20] \longrightarrow [0, 160]$$
$$x \longrightarrow y = f(x) = 8x$$

Desde la Ciencia

∪, símbolo de unión

El símbolo ∪ entre dos intervalos. Indica que el conjunto resultante es el formado por los números del primer intervalo junto con los del segundo.

Así, el dominio de la función definida a trozos del recuadro anterior, $f(x) = 8x$, es: $D(f) = \mathbb{R}$.

Hay que tomar en cuenta que, en toda función, la imagen y de un valor de x es única, pero puede ocurrir que un valor de y tenga más de una preimagen. Por ejemplo:

En la función que asigna a cada número su valor elevado al cuadrado, el número 9 tiene dos preimágenes: -3 y 3. Esta corresponde a una función cuadrática.

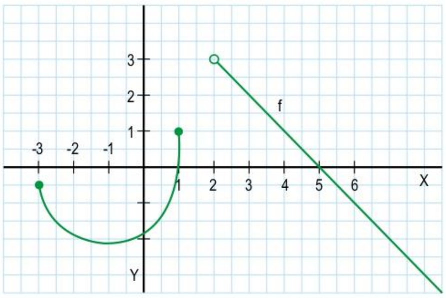
Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Determinación gráfica del dominio y del recorrido

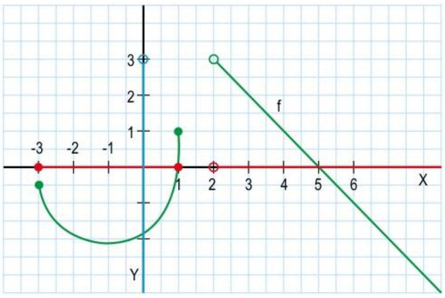
También podemos determinar el dominio y el recorrido de una función a partir de su gráfica.

- El dominio es el conjunto de los valores de la variable x obtenidos al proyectar ortogonalmente los puntos de la gráfica sobre el eje de abscisas.
- El recorrido es el conjunto de los valores de la variable y obtenidos al proyectar ortogonalmente los puntos de la gráfica sobre el eje de ordenadas.

Determinemos el dominio y el recorrido de esta función:

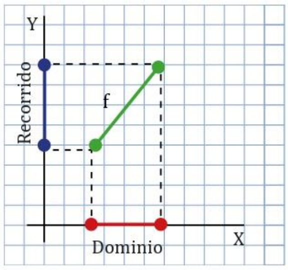


$D(f) = (-3, 1) \cup (2, +\infty)$, $R(f) = (-\infty, 3)$.



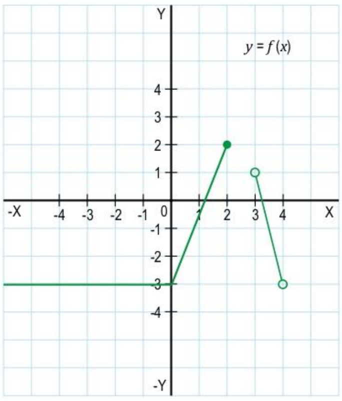
Aplicación para la vida

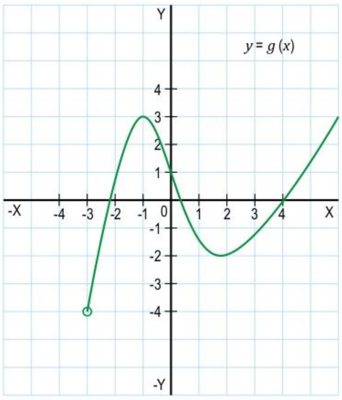
Las funciones de la variable real son utilizadas en la mayoría de los procesos de la vida cotidiana. Por eso, para proyectar un punto P sobre una recta *r*, trazamos por P una recta perpendicular a *r* y hallamos el punto de intersección *P´* de las dos rectas.



Trabajo individual

1. Determine el dominio y el recorrido de estas funciones:





Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

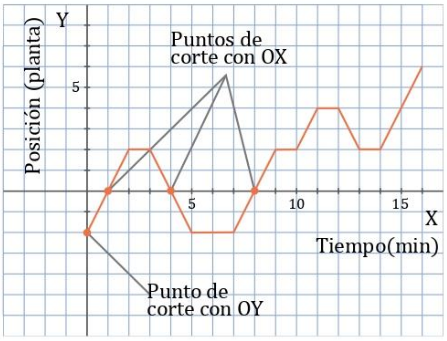
2. Funciones lineales

D.C.D. M.4.1.49. Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, monotonía, cortes con los ejes.

Características de las funciones

La gráfica de una función nos permite observar una serie de características que estudiaremos a continuación. Entre estas son: puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad y discontinuidad, tasa de variación media, simetrías y periodicidad.

Así, por ejemplo, tenemos esta gráfica representativa en un plano de coordenadas cartesiana:



Puntos de corte con los ejes

En la gráfica anterior representamos la posición del ascensor de unos grandes almacenes durante dieciséis minutos de funcionamiento. Marcamos cada minuto en el plano cartesiano.

El eje de las X representa el tiempo transcurrido en minutos, mientras que el eje de las Y representa la posición del ascensor de acuerdo con la posición en donde se encontraba durante la observación que, en nuestro caso, fue de dieciséis minutos.

Los puntos donde la gráfica corta a los ejes de coordenadas son puntos destacados que se analizan por sus características. Observamos que la gráfica corta el eje OY en el punto (0, -2). Esta es la posición del ascensor cuando empezamos a contar el tiempo por lo que se supone se encontraba en el subterráneo 2. También hay tres puntos donde corta el eje OX: (1, 0), (4, 0) y (8, 0). Esto corresponde a los momentos en que el ascensor pasa por la planta baja en los tiempos determinados.

Cuando queremos encontrar los puntos de corte de las funciones de variable real, realizamos este proceso. En caso de conocer la expresión algebraica de una función, podemos determinar analíticamente los puntos de corte con los ejes. Como el eje OY es una recta de ecuación x = 0 y el eje OX es una recta de ecuación y = 0, a los puntos de corte de la función con los ejes los hallamos resolviendo estos sistemas:

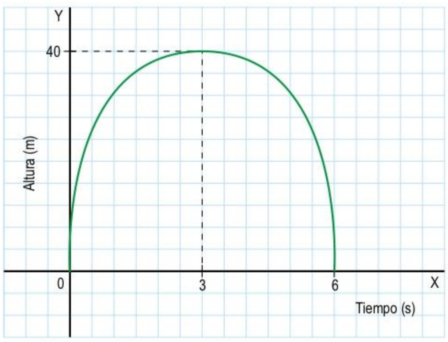
Punto de corte con el eje Y	Punto de corte con el eje X
$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = f(x) \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = f(x) \end{array}\right\}$

Se forman los puntos: (1, 0), (4, 0) y (8, 0).

Crecimiento y decrecimiento

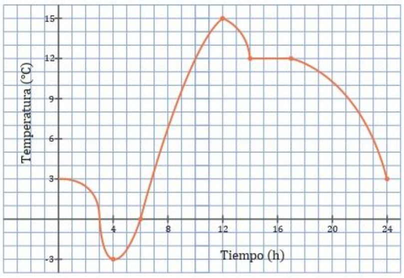
Consideremos la altura de un balón lanzado en tiro parabólico en función del tiempo. Fijémonos en que en el intervalo de 0 a 3 s, a medida que aumenta el valor de la variable x (el tiempo), el valor de la variable y (la altura) también aumenta. Decimos que la función es creciente en este intervalo.

Lanzamiento de balón



Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Entender las características de las funciones es muy importante en la vida cotidiana, por lo que la gráfica muestra la evolución de la temperatura ambiente registrada en un observatorio de montaña a lo largo de un día soleado de primavera.



Observamos que:

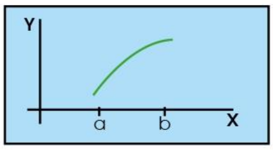
- La temperatura aumentó entre las 4 h y las 13 h.
- La temperatura disminuyó entre las 0 h y las 4 h, entre las 13 h y las 16 h, y entre las 19 h y las 24 h.
- La temperatura se mantuvo constante entre las 16 h y las 19 h.
- Los puntos de la gráfica (0, 3), (3, 0) y (6, 0) están sobre los ejes de coordenadas.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Si leemos la gráfica de la temperatura ambiente de izquierda a derecha, vemos que, en el período en que la temperatura aumenta, la gráfica es ascendente.

Decimos que la función es creciente en este período.

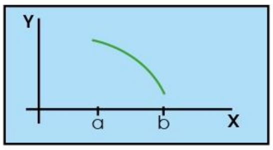
Una función es creciente en un intervalo si, al aumentar el valor de la variable x dentro de este intervalo, aumenta el valor de la variable y.



En cambio, en los períodos en que la temperatura disminuye, la gráfica es descendente.

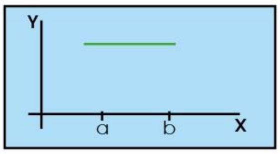
Decimos que la función es decreciente en estos períodos.

Una función es decreciente en un intervalo si, al aumentar el valor de la variable x dentro de este intervalo, disminuye el valor de la variable y.



Hay un período (de 16 h a 19 h) en que la temperatura ni aumenta, ni disminuye; la gráfica es una recta paralela al eje de abscisas. Decimos que la función es constante en este período.

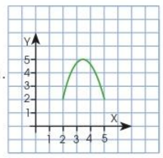
Una función es constante en un intervalo si, para todo valor de la variable x dentro de este intervalo, la variable y no varía.

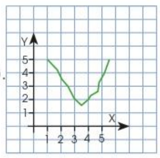


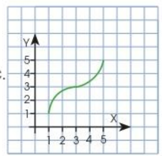
La función constante puede darse por una tabla de valores o por su gráfica como se vio en la figura anterior.

Trabajo individual

1. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

a.


b.


c.


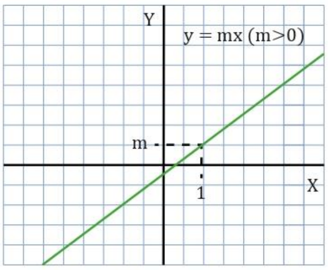
Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

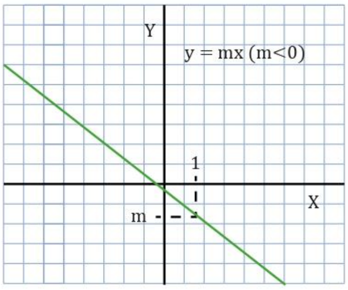
2.1. Características de las funciones lineales

Una función lineal o de proporcionalidad directa tiene dos características fundamentales:

- Es creciente si la constante de proporcionalidad es positiva (m > 0).
- Es decreciente si la constante de proporcionalidad es negativa (m < 0).

Gráficamente tienen esta forma.



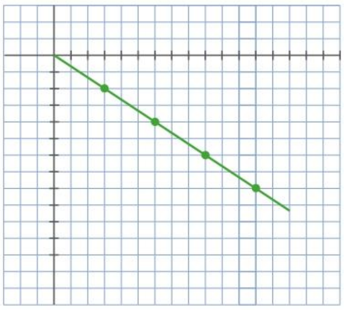


Veamos ahora la función que relaciona la longitud que recorre un submarinista con el tiempo de inmersión, sabiendo que tarda un minuto y medio en descender un metro.

Expresamos la función mediante una tabla de valores.

x: Tiempo de inmersión (min)	3	6	9	12
y: Profundidad (m)	-2	-4	-6	-8

La gráfica de acuerdo con la información proporcionada sería:



La constante de proporcionalidad es:

$$\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{-6}{9} = \frac{-8}{12} = \frac{-2}{3}$$

Y la expresión algebraica de la función es:

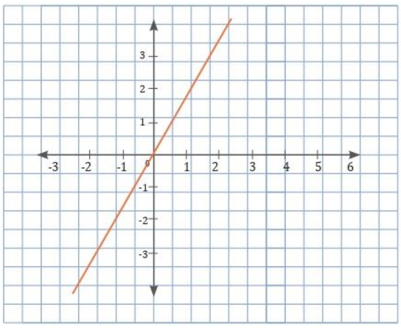
$$f(x) = \frac{-2}{3}\,x$$

La gráfica de esta función también es una recta que pasa por el origen de coordenadas, pero su pendiente es negativa, por lo que se hace una función decreciente.

Ahora vamos a determinar mediante su gráfico y pendiente si la función es creciente o decreciente. La tabla viene dada de esta forma.

Masa (kg)	1	2	3	4
y: Precio	1,75	3,50	5,25	7

La gráfica de acuerdo con la información proporcionada sería.



Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

2.2. Gráfica de una función lineal

D.C.D. M.4.1.50. Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología) e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente.

Expresión algebraica de una función lineal

En este ejemplo, vamos a aprender el procedimiento para obtener la expresión algebraica de una función lineal a partir de una tabla de valores.

Escribimos la expresión algebraica de la función dada por esta tabla de valores.

x	2	4	6	8
y	−1	−2	−3	−4

Veamos si las variables son directamente proporcionales o no. Para ello, calculamos los cocientes entre cada valor de la variable y el valor correspondiente de la variable x.

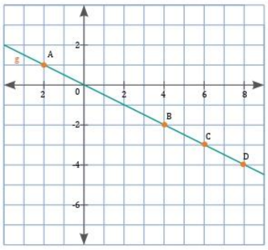
$$\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{-3}{6} = \frac{-4}{8}$$

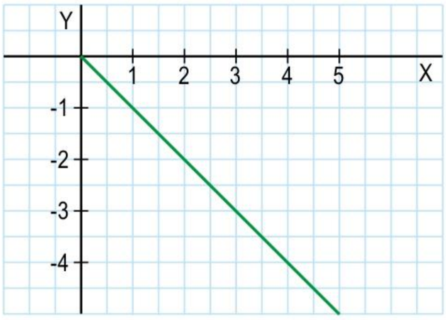
Observamos que hemos tenido en todos los casos el mismo valor.

Así, las variables x e y son directamente proporcionales con constante de proporcionalidad $-\frac{1}{2}$. Se trata, pues, de una función lineal cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx$, siendo m la constante de proporcionalidad.

Por lo tanto, la expresión algebraica de la función es $y = -\frac{1}{2}x$. Su pendiente negativa hace que sea una función creciente.

La gráfica respectiva que corresponde a la función $y = -\frac{1}{2}x$ sería:





Observamos que la gráfica de la función es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Se trata, por tanto, de una función lineal o de proporcionalidad directa cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx$, siendo m la pendiente de la recta.

Para hallar la pendiente consideramos un punto cualquiera de la gráfica, por ejemplo, el punto de coordenadas $(1, -1)$.

La pendiente de la recta es el cociente entre $y = -1$ y $x = 1$. Por tanto, la pendiente es $m = -1$. Así, la expresión algebraica de la función es $y = -x$.

Trabajo individual

1. La velocidad de impresión de una impresora es de ocho páginas cada minuto.
   a. Si hasta este momento había impreso 32 páginas, ¿cuántas habrá impreso transcurridos dos minutos? ¿Y cuántas páginas había impreso hasta hace un minuto?
   b. ¿Cuál es la expresión algebraica de la función que permite hallar el número de páginas impresas en función del tiempo?
   c. Realice la tabla de valores correspondiente a la función.
   d. Grafique la función en el plano cartesiano.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Función afín

Para definir la función afín, vamos a estudiar dos situaciones.

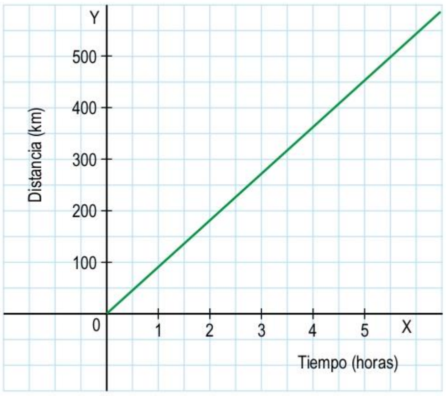
A las 0 horas un piloto que circula a una velocidad constante de 90 km/h pasa por el punto de control de una carrera de autos.

La función que relaciona la distancia a la que se encuentra el auto del punto de control con el tiempo transcurrido viene dada por esta tabla de valores.

Tiempo transcurrido en horas (x)	0	1	2	3	4	5
Distancia al control en km (y)	0	90	180	270	360	450

Podemos observar que es una función de proporcionalidad directa cuya expresión algebraica es $y = 90\,x$. Observamos su gráfica en esta figura.

Piloto A



Veamos a continuación la segunda situación.

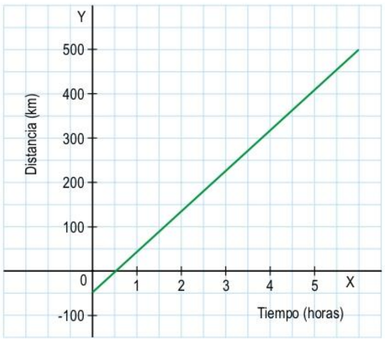
En ese momento a otro piloto que también circula a 90 km/h le faltan 50 km para llegar al control.

En este caso tendremos la siguiente tabla.

Tiempo transcurrido en horas (x)	0	1	2	3	4	5
Distancia al control en km (y)	–50	40	130	220	310	400

La gráfica de esta función es una semirrecta cuyo punto inicial tiene coordenadas (0, –50). El valor de la ordenada de este punto, –50, es la ordenada en el origen.

Piloto B



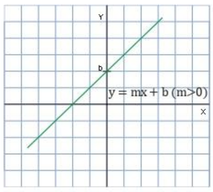
Observamos que, cuando la variable x incrementa su valor en 1, 2, 3... unidades, se produce un incremento de la variable y de 90, 180, 270... unidades, respectivamente.

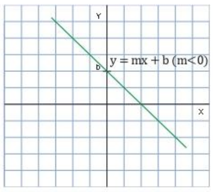
El cociente entre la variación de la variable y con relación al incremento de la variable es un valor constante igual a 90:

$$\frac{90}{1} = \frac{180}{2} = \frac{270}{3} = 90.$$

Este valor constante que se representa por m es la pendiente y mide la inclinación de la semirrecta respecto al semieje positivo de abscisas.

La expresión algebraica de la función que nos da la distancia al control del segundo auto es $y = 90\,x - 50$. Diremos que es una «función afín».





Una función afín es una función cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx + b$ $(m \neq 0)$, siendo b la ordenada en el origen.

Su gráfica es una recta que pasa por el punto (0, b) y tiene pendiente m.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

UNIDAD 2

CONTENIDO:

- Funciones polinómicas básicas-Características de las funciones de segundo grado
- Funciones y problemas de aplicación
- Funciones cuadráticas
- Características de las funciones cuadráticas

10
décimo
año

3. Funciones polinómicas básicas

3.1. Características de las funciones de segundo grado

D.C.D. M.4.1.51. Definir y reconocer funciones potencia con n = 1, 2, 3, representarlas de manera gráfica e identificar su monotonía.

Las funciones de segundo grado, o funciones cuadráticas, son aquellas cuya expresión

algebraica es un polinomio de segundo grado en la variable x.

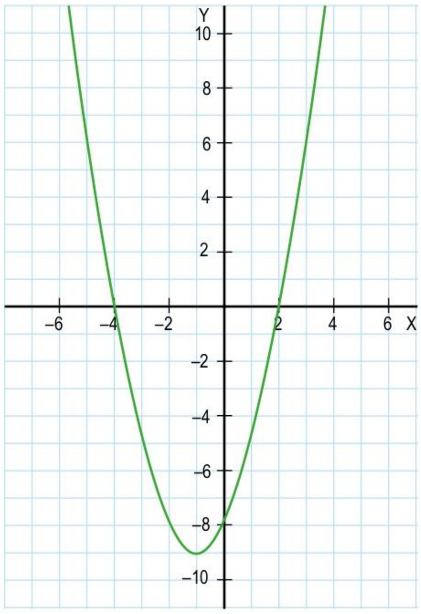
$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

La representación gráfica de estas funciones es una curva que recibe el nombre de *parábola*.

Consideremos la función $y = x^2 + 2x - 8$, y construyamos una tabla de valores.

X	0	1	2	3	–1	–2	–3
Y	–8	–5	0	7	–9	–8	–5

Si la representamos gráficamente, obtenemos la parábola de esta figura, en la que podemos observar algunas características.



- Tiene sus ramas orientadas hacia arriba.
- Corta al eje OX en los puntos (–4, 0) y (2, 0), y al eje OY en el punto (0, –8).
- Es simétrica respecto a un eje paralelo al eje OY, la recta x = –1.
- Presenta un punto o vértice que se corresponde con un mínimo o máximo valor absoluto, por el que pasa el eje de simetría. En este caso, las coordenadas del vértice son (–1, –9).

En general diremos que:

Para dibujar la parábola que representa una función cuadrática, es útil seguir este procedimiento:

- **Orientación de las ramas**: Si a > 0, se abre hacia arriba y, si a < 0, se abre hacia abajo.
- **Eje de simetría**: Es la recta $x = -\frac{b}{2a}$.
- **Vértice**: El valor de su abscisa viene dado por la ecuación del eje $x = -\frac{b}{2a}$. Una vez tenemos el valor de la abscisa, sustituimos este en la ecuación de la parábola y obtenemos el valor de la ordenada del vértice.
- **Puntos de intersección con los ejes**

  Eje OY, (0, c): Obtenemos para $x = 0$.

  Eje OX, (x, 0): Obtenemos para $y = 0$, al resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Si igualamos a 0 una función cuadrática, obtenemos una ecuación de segundo grado.

Hemos visto que las raíces o soluciones de dicha ecuación coinciden con los puntos de corte de la parábola que describe la función cuadrática con el eje OX.

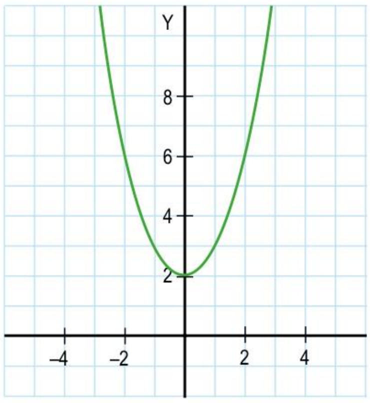
Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Esto nos proporciona un método gráfico de resolución de ecuaciones de segundo grado, representando la parábola correspondiente y observando si corta al eje OX o no. Los valores donde se corta el gráfico con el eje x son las raíces de la ecuación de segundo grado.

Ahora veremos cuatro casos de distintas parábolas.

La parábola no corta al eje OX.

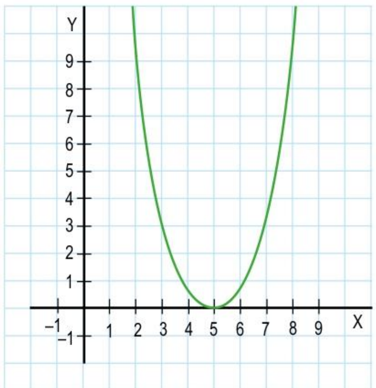
$$y = x^2 + 2$$



La ecuación de segundo grado $x^2 + 2 = 0$ no tiene solución.

La parábola corta el eje OX en un punto.

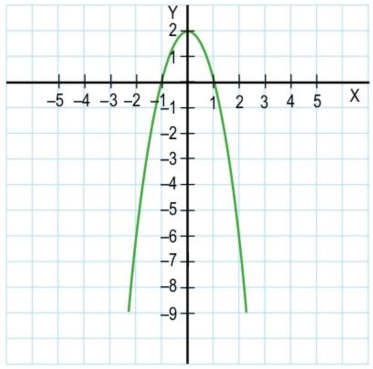
$$y = x^2 - 10x + 25$$



La ecuación de segundo grado $x^2 - 10x + 25 = 0$ solo tiene una solución: $x = 5$.

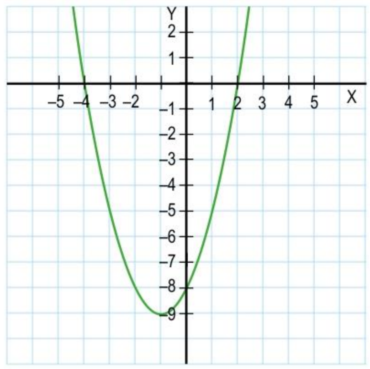
La parábola corta el eje OX en dos puntos.

$$y = -2x^2 + 2$$



La ecuación de segundo grado $-2x^2 + 2 = 0$ tiene dos soluciones: $x = -1$ y $x = 1$.

$$y = x^2 + 2x - 8$$



La ecuación de segundo grado $x^2 + 2x - 8 = 0$ tiene dos soluciones: $x = -4$ y $x = 2$.

Mundo Digital

Razone si la gráfica de la función cuadrática tiene siempre puntos de corte con los ejes OX y OY.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

3.2. Funciones y problemas de aplicación

D.C.D. M.4.1.52. Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resolver problemas.

Método general de resolución de problemas

Antes de abordar la resolución de un problema, debemos entender el enunciado y ser capaz de reescribirlo con nuestras propias palabras. Una vez que hayamos analizado el problema, tendremos que elaborar un plan de resolución y resolverlo.

Como último paso y antes de dar el problema por terminado, debemos comprobar que el resultado responde la pregunta inicial planteada y que el proceso de resolución elegido es correcto.

Ahora revisemos este problema:

Daniela corre a una velocidad constante de 12 km/h. Su vecino Carlos ha salido a correr 1 h antes, a una velocidad constante de 8 km/h en la misma dirección que Daniela.

Determinemos el tiempo de ejercicio que lleva Daniela cuando se encuentra con Carlos y el espacio recorrido por ambos hasta ese momento.

1. Comprender

- Volvamos a leer el problema y enunciémoslo con nuestras propias palabras.
- Anotemos los datos que nos proporcionan y los que nos piden.

2. Planificar

Representamos por S_1 y S_2 las funciones que nos dan el espacio recorrido por Daniela y por Carlos en función del tiempo transcurrido, variable t, desde la salida de Daniela.

Daremos valores del tiempo expresados en horas a la variable t, puesto que la velocidad viene expresada en km/h.

Así, el tiempo de ejercicio que lleva Daniela cuando se encuentra con Carlos será la abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones S_1 y S_2, y el espacio recorrido por ambos en el momento del encuentro será la ordenada de este punto.

3. Ejecutar el plan

Si tomamos la salida de Daniela en el instante $t = 0$, la expresión algebraica de la función.

Elaboramos la tabla de valores de la función S_1 para representarla posteriormente.

Tiempo en horas (t)	0	1	2	3
Espacio en kilómetros (S_1)	0	12	24	36

Cuando Daniela empieza el ejercicio, en el instante $t = 0$, Carlos lleva recorridos 8 km, por lo que la expresión algebraica de la función S_2 es $S_2 = 8\,t + 8$.

Carlos empezó a correr 1 h antes que Daniela, por lo que ha salido en el instante $t = -1$. Partiendo de este valor, elaboramos una tabla de valores de la función S_2.

Tiempo en horas (t)	-1	0	1	2	3
Espacio en kilómetros (S_2)	0	8	16	24	32

Trabajo individual

1. Descompón en producto de factores los siguientes polinomios:

   a. $x^2 - 4$ c. $x^2 - x - 12$ e. $x^2 - 8x - 9$

   b. $x^2 - 9x$ d. $x^2 + 4x + 3$ f. $2x^2 + 15x + 25$

2. ¿Puede descomponerse en factores el polinomio $x^2 - 2x + 5$? ¿Por qué?

3. Expresa, en forma ordenada y reducida:

   a. Un polinomio de segundo grado que tenga como raíces los valores $x = -5$ y $x = -2$.

   b. Un polinomio de segundo grado que tenga como raíz doble $x = 7$.

4. Indica, sin resolverlas, el número de soluciones de cada una de estas ecuaciones.

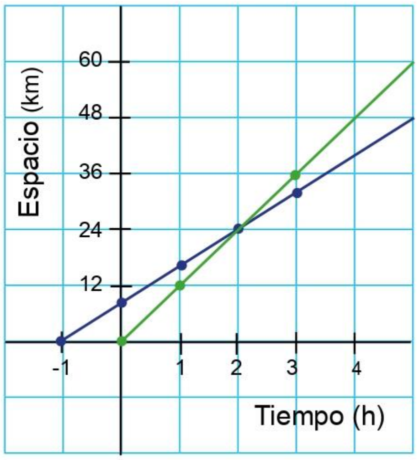
   a. $2\,x^2 - x - 3 = 0$ c. $x^2 + 2\,x + 3 = 0$

   b. $x^2 + 6x + 1 = 0$ d. $x^2 + 3x + 2 = 0$

5. ¿Qué le ocurre a la función de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ si el coeficiente a es 0?

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Continuando con el problema, ahora representamos gráficamente ambas funciones sobre el mismo sistema de coordenadas cartesianas.



Observamos en la gráfica que el punto donde se cortan las dos rectas es P(2, 24).

Por tanto, Daniela encuentra a Carlos cuando lleva dos horas de ejercicio, y ambos han recorrido 24 km.

4. Revisar

Revisemos los cálculos realizados tanto en las operaciones como en la elaboración de las tablas.

Comprobemos que las coordenadas del punto P(2, 24) verifican las expresiones algebraicas de las funciones S_1 y S_2.

Con todo el proceso revisado de resolución de problemas vamos a resolver este ejercicio:

Un fabricante vende celulares a un precio medio de \$175,35 la unidad. El costo de fabricar los celulares es de \$125,60 por unidad, más un costo fijo, independiente de la cantidad de celulares vendidos, de \$5 200 000, correspondiente a la inversión inicial.

Determinemos:

a. La función del valor total de las ventas (en dólares) en función del número de unidades vendidas.

b. La función del costo total en función del número de unidades vendidas.

c. La función del beneficio total en función del número de unidades vendidas.

d. El número de unidades vendidas a partir de que el fabricante empezará a tener beneficios.

1. Comprender

- Volvamos a leer el problema y enunciémoslo con nuestras propias palabras.
- Anotemos los datos que nos proporcionan y los que nos piden.

2. Planificar

Hay que reconocer los datos proporcionados por el problema, se trata de una función de ventas de celulares, en donde tiene un precio de venta, costo de fabricación por unidad y un costo fijo.

Representamos con la variable *x* a la cantidad de celulares producidos y vendidos, determinamos los ingresos, costos y la utilidad.

El ingreso es igual a la cantidad producida y vendida *x* por el precio medio de venta.

El costo total es igual al costo por unidad multiplicado por la cantidad producida y vendida más los costos fijos.

Mientras que la utilidad sería la diferencia de los ingresos menos los costos totales.

3. Ejecutar el plan

Al ejecutar el plan tenemos que responder cada una de los literales planteados.

a. El valor total de las ventas que no es otra cosa que los ingresos totales estaría expresado como:

$$f(x) = 175{,}35x$$

b. El valor de los costos totales de acuerdo con lo planteado y planificado quedaría expresado como:

$$C(x) = 125{,}60x + 5\ 200\ 000$$

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

c. La utilidad expresada resulta de la diferencia de los ingresos menos los costos:

$$U(x) = 175{,}35x - (125{,}60x + 5\,2000\,000)$$

$$U(x) = 175{,}35x - 125{,}60x - 5\,2000\,000$$

$$U(x) = 49{,}75x - 5\,2000\,000$$

d. Para encontrar el número de unidades vendidas a partir de que el fabricante empezará a tener beneficios, deberemos plantear que la utilidad al menos sea mayor o igual a cero. Siendo así la expresión quedaría como:

$$49{,}75x - 5\,2000\,000 = 0$$

$$49{,}75x = 5\,2000\,000$$

$$x = 104{,}52$$

Entonces el fabricante deberá vender 105 unidades al menos para que comience a tener beneficios.

5. Revisar

Revisemos los cálculos realizados tanto en las operaciones efectuadas al momento de despejar la variable número de unidades.

Comprobemos que las 105 unidades efectivamente comiencen a generar ganancias en la función utilidad.

Ahora realizamos otro problema de la vida cotidiana.

El costo de obtener copias de CD interactivo es de $ 0,50 la unidad, más $ 3 000 fijos de producción, el precio de venta es de $ 2 al público por cada CD.

Determinar

a. La función del valor total de las ventas (en dólares) en función del número de unidades vendidas.

b. La función del costo total en función del número de unidades vendidas.

c. La función del beneficio total en función del número de unidades vendidas.

Al ejecutar el plan respectivo tenemos que responder cada uno de los literales planteado:

a. El valor total de las ventas que no es otra cosa que los ingresos totales estaría expresado como:

$$f(x) = 2x$$

b. El valor de los costos totales de acuerdo con lo planteado y planificado quedaría expresado como:

$$C(x) = 0{,}50x + 3000$$

c. La utilidad expresada resulta de la diferencia de los ingresos menos los costos:

$$U(x) = 2x - (0{,}50x + 3000)$$

$$U(x) = 2x - 0{,}50x - 3000$$

$$U(x) = 1{,}50x - 3000$$

Trabajo colaborativo

1. Existen varios tipos de funciones cuya gráfica es una recta.

   Cada una de ellas se caracteriza por la correspondiente expresión algebraica y por una gráfica determinada. Con la ayuda de Internet respondan las cuestiones planteadas a continuación:

a. ¿Qué función polinómica tiene por gráfica una recta?

b. Escriban la expresión algebraica de estos tipos de funciones:

- función constante
- función afín
- función lineal
- función identidad

2. Describe tres situaciones cotidianas en las que se establezcan relaciones entre diferentes variables e indica, en cada caso, cuáles son las variables dependientes y cuáles las variables independientes.

3. En estos pares de magnitudes relacionadas, indica cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente:

   a. El alargamiento que experimenta un muelle cuando se cuelga un peso de su extremo y dicho peso.
   b. El tiempo que circula un auto a velocidad constante y la distancia recorrida.
   c. El peso de una barra de pan y el de la harina usada en su elaboración.
   d. La edad de un niño y su estatura.
   e. El importe del recibo del gas y el tiempo de funcionamiento de la calefacción.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Evaluación

Indicadores de evaluación

- Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto. (I.4.)
- Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos como funciones, emplea gráficas de barras, bastones, diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema. (I.2.)
- Determina el comportamiento (función creciente o decreciente) de las funciones lineales en Z, con base en su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas, valora el empleo de la tecnología, y calcula funciones compuestas gráficamente. (I.4.)

1 Indica si estos enunciados son verdaderos (V) o falsos (F):

a. Una función es la relación de dependencia entre dos variables en la que a cada valor de la variable independiente x le corresponde uno o más valores de la variable dependiente y. ( )

b. El recorrido de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente y se representa por R. ( )

c. Una función es decreciente en un intervalo si, al aumentar el valor de la variable x dentro de este intervalo, disminuye o permanece constante la variable y. ( )

d. Una función de gráfica continua tiene un máximo en un valor de la variable x si la imagen de este valor es menor o igual que la de cualquier otro valor de la variable independiente de la función . ( )

e. Una función es discontinua cuando no se puede dibujar de un solo trazo o cuando la gráfica presenta alguna interrupción. ( )

f. Una ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c; a \neq 0$. ( )

g. En la gráfica de una función cuadrática la orientación de las ramas depende del valor de a. Si $a > 0$, se abre hacia arriba, y, si $a <$ 0, se abre hacia abajo. ( )

h. Ecuación es una igualdad que se verifica para algunos valores numéricos de las letras que en ella aparecen. ( )

2 Por alquilar un automóvil cobran $ 100 diarios más $ 0,30 por kilómetro recorrido. Si en un día se ha recorrido un total de 300 km, ¿cuál es el valor que se debe pagar?

a. $90

b. $100

c. $130

d. $190

3 El vértice de la parábola $f(x)= x^2 - 8x + 5$ corresponde al par ordenado.

a. (4, 11)

b. (4, -11)

c. (-8, 5)

d. (8, 5)

4 Encuentra el valor de k en la expresión $x^2 +(k + 2)x + 2k = 0$ para que tenga dos raíces reales iguales.

5 En una librería venden un determinado modelo de esfero a $ 1,20 la unidad.

a. Completa, en tu cuaderno, la siguiente tabla de valores:

Número de esfero (x)	1	2	3	4
Importe en dólares (y)				

b. Representa la gráfica de la función e indica si se trata de una gráfica continua o no.

c. ¿Qué valor tiene la variable dependiente si el valor de la variable independiente es 15?

Autoevaluación

- ☐ Represento como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos. (I.4)
- ☐ Resuelvo problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos como funciones. (I.2)
- ☐ Determino el comportamiento de las funciones lineales en los números enteros, utilizando la tabla de valores o gráficas. (I.4)

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

2. Funciones cuadráticas

2.1. Características de las funciones cuadráticas

D.C.D. M.4.1.57. Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica, determinando sus características: dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad.

Función cuadrática y ecuación de segundo grado

Expondremos la noción de las ecuaciones de segundo grado o funciones cuadráticas. En general diremos que:

Una ecuación de segundo grado es aquella que tiene por expresión algebraica.

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

Su gráfica es una parábola cuyas características son:

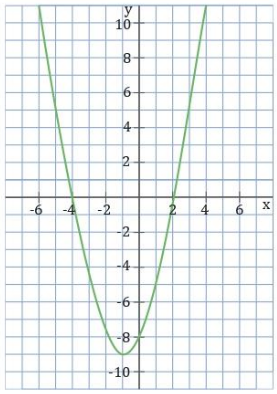
- Es simétrica respecto de un eje, una recta paralela al eje OY que pasa por su vértice.
- Las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba y su vértice es el punto cuya abscisa es el mínimo absoluto, si $a > 0$.
- Las ramas de la parábola están orientadas hacia abajo y su vértice es el punto cuya abscisa es el máximo absoluto, si $a < 0$.
- El dominio de la función cuadrática es la recta real.
- La función es continua en todo su dominio.
- El recorrido o rango de la función va desde su vértice hasta el infinito si $a > 0$, o desde el infinito negativo hasta el vértice si $a < 0$.

La representación gráfica de estas funciones es una curva que recibe el nombre de *parábola*.

Para dibujar la parábola que representa una ecuación cuadrática, es útil seguir este procedimiento:

- **Orientación de las ramas**: Si, $a > 0$, se abre hacia arriba; y, si $a < 0$, se abre hacia abajo.
- **Eje de simetría**: Es la recta $x = -\frac{b}{2a}$.
- **Vértice**: El valor de su abscisa viene dado por la ecuación del eje $x = -\frac{b}{2a}$.

Una vez que tenemos el valor de la abscisa, sustituimos este en la ecuación de la parábola y obtenemos el valor de la ordenada del vértice.



- Puntos de intersección con los ejes

Eje OY, (0, c): Lo obtenemos para $x = 0$.

Eje OX, (x, 0): Lo obtenemos para $y = 0$ al resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Si igualamos a 0 una función cuadrática, obtenemos una ecuación de segundo grado.

Hemos visto que las raíces o soluciones de dicha ecuación coinciden con los puntos de corte de la parábola que describe la función cuadrática con el eje OX.

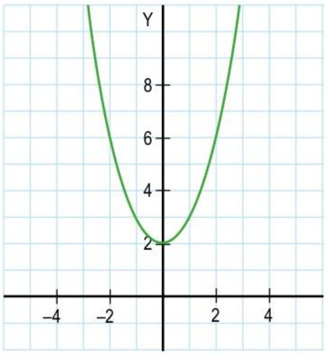
Esto nos proporciona un método gráfico de resolución de ecuaciones de segundo grado, representando la parábola correspondiente y observando si corta al eje OX o no. Los valores donde se corta el gráfico con el eje x son las raíces de la ecuación de segundo grado.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Ahora analizaremos tres casos de distintas parábolas con su respectiva monotonía.

1. La parábola no corta al eje OX.

$$y = x^2+3$$



- La ecuación de segundo grado $y = x^2+3$ no tiene solución.
- Es simétrica respecto de un eje, es la recta $x = 0$ paralela al eje OY que pasa por su vértice.
- Las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba y su vértice es el punto cuya abscisa es el mínimo absoluto .
- El dominio de la función cuadrática es la recta real.
- La función es continua en todo su dominio.
- El recorrido o rango de la función sería $(3,+\infty)$.
- La parábola cumple el criterio de paridad $f(-x)= -f(x)$ para todo su dominio.

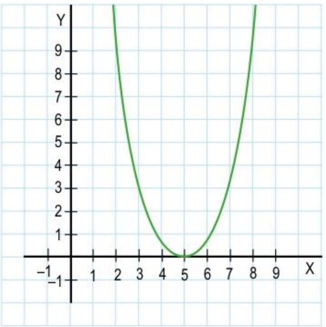
Desde la Ciencia

El movimiento parabólico gobierna sobre todos los objetos lanzados dentro del campo de gravedad de la Tierra.

Básicamente, en el campo del deporte, podremos notar los movimientos parabólicos, por ejemplo, un jugador de fútbol realiza un pase de largo.

2. La parábola corta el eje OX en un punto

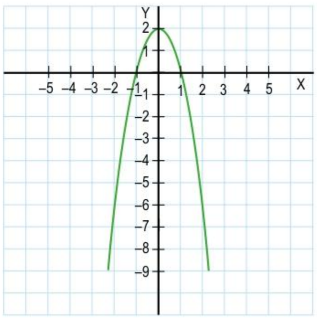
$$y = x^2- 10x + 25$$



- La ecuación de segundo grado $y = x^2- 10x + 25$ solo tiene una solución: $x = 5$.
- Es simétrica respecto de un eje, es la recta   paralela al eje OY que pasa por su vértice.
- Las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba y su vértice es el punto cuya abscisa es el mínimo absoluto $(5,0)$.
- El dominio de la función cuadrática es la recta real.
- La función es continua en todo su dominio.
- El recorrido o rango de la función sería $(3,+\infty)$.
- La parábola no cumple el criterio de paridad $f(-x)= -f(x)$ para todo su dominio.

3. La parábola corta el eje OX en dos puntos.

$$y = - x^2 + 4$$

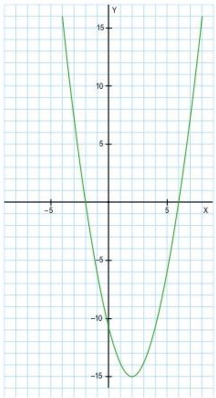


Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Ejemplo 8

Representamos la gráfica de la función cuadrática cuya expresión algebraica es $y = x^2 - 4x - 12$.

Los coeficientes de la función de segundo grado son: $a = 1$, $b = -4$ y $c = -12$.



- **Orientación de las ramas**: $a = 1 > 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba.
- **Eje de simetría**: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$, luego es la recta $x = 2$.
- **Vértice**: Una vez tenemos el valor de su abscisa $x = 2$, dada por la ecuación del eje de simetría, lo sustituimos en la ecuación de la parábola y obtenemos el valor de la ordenada: $y = x^2 - 4x - 12$.

  $= 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = -16$

  Por tanto, las coordenadas del vértice son: $(2, -16)$.

- **Puntos de corte**

  Con el eje OY: Tomando $x = 0$ en la ecuación de la parábola, tenemos que: $y = -12$. Luego, el punto de corte con el eje OY es $(0, -12)$.

  Con el eje OX: Considerando $y = 0$, y resolviendo la ecuación $x^2 - 4x - 12 = 0$, tenemos que

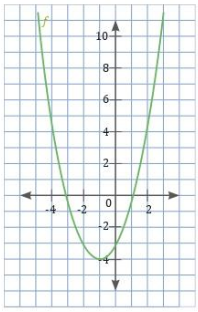
  $x = 6$ y $x = -2$. Luego, los puntos de corte con OX son $(6, 0)$ y $(-2, 0)$.

  Situamos el vértice y los puntos de corte y, a partir de ellos, podemos representar la gráfica.

$\in \mathbb{R} f = -+\neq (x)$

Ejemplo 9

Posee estas características:



- El dominio de la función cuadrática es la recta real.
- La función es continua en todo su dominio.
- El recorrido o rango de la función sería $(-16, +\infty)$.
- La parábola no cumple el criterio de paridad $f(-x) = -f(x)$ para todo su dominio.

Representamos la gráfica y principales características de monotonía de la función cuadrática cuya representación algebraica es $y = x^2 + 2x - 3$.

Trabajando la función algebraicamente tenemos:

Los coeficientes de la función de segundo grado son: $a = 1$, $b = 2$ y $c = -3$.

- **Orientación de las ramas**: $a = 1 > 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba.
- **Eje de simetría**: $y = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$, luego es la recta $x = -1$.
- **Vértice**: Una vez tenemos el valor de su abscisa $x = -1$, dada por la ecuación del eje de simetría, lo sustituimos en la ecuación de la parábola y obtenemos el valor de la ordenada: $y = x^2 + 2x - 3$.

  $= (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

  Por tanto, las coordenadas del vértice son: $(-1, -4)$.

Situamos el vértice y los puntos de corte $x = -3$ y $x = 1$, a partir de ellos, podemos representar la gráfica, las características de monotonía las analiza el lector.

Trabajo individual

1. Representar la gráfica y principales características de monotonía de estas funciones cuadráticas cuya representación algebraica es:

$f(x) = x^2 + 3$ $\qquad g(x) = -x^2 - 5$ $\qquad h(x) = x^2 - 7x + 6$

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

UNIDAD 3

CONTENIDO:

- Completación de cuadrados
- Aplicaciones de las funciones cuadráticas
- Probabilidad-Definición de probabilidad
- Métodos de conteo

10

décimo año

2.2. Completación de cuadrados

D.C.D. M.4.1.59. Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factoreo, completación de cuadrados, fórmula binomial) en la solución de problemas.

Para poder resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita de manera analítica, podemos emplear algunos métodos de resolución, entre ellos tenemos la factorización, completación de cuadrados y fórmula binomial. En esta sección nos centraremos en la completación de cuadrados.

El método de completar el cuadrado es utilizado cuando tenemos una ecuación que es difícil o imposible de factorizar. Lo que hace la completación de cuadrados es convertir un polinomio en un trinomio cuadrado perfecto, el mismo que sería más fácil de graficar y resolver.

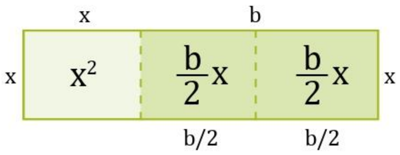
Para completar el cuadrado partimos de la estrategia de ir creando un cuadrado, es decir tomamos algo que probablemente no sea un cuadrado y, a partir de eso, convertirlo en uno. Es decir, transformamos primero en un trinomio cuadrado perfecto, con el fin de «completar» la ecuación para crear un cuadrado de binomio y, de esa manera, poder despejar la incógnita X y obtener las raíces o soluciones de la ecuación.

Siguiendo con el método expresado de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, la misma que, si enviamos al término c al lado derecho de la ecuación, nos quedaría como $x^2 + bx = -c$.

Entonces, a partir de ese principio, al lado izquierdo de la expresión $x^2 + bx = -c$ le está faltando un término para poder completar el trinomio cuadrado perfecto. El término faltante debe cumplir el requisito al extraer la raíz al primer y tercer términos. El producto de los dos términos obtenidos multiplicado por 2 nos da el trinomio cuadrado perfecto.

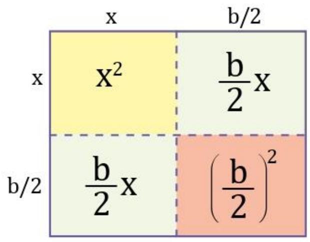
Para que cumpla el requisito expuesto, el término deberemos dividir para 2 y elevarlo al cuadrado, es decir $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Resolviendo el cuadrado obtendríamos $\frac{b^2}{4}$.

Siguiendo con el esquema de la explicación, podemos tener cualquier expresión y completar el cuadrado que falta para la resolución. Gráficamente vamos a ilustrar la expresión $x^2 + bx$, representada por un rectángulo cuyo lado menor tiene de medida x y el lado mayor es igual a $x + b$. Obtenemos este gráfico:



La expresión $x^2 + bx$ claramente expresada en la página anterior no representa un cuadrado perfecto, más bien corresponde a un rectángulo, la estrategia de completar el trinomio cuadrado perfecto parte de ese gráfico.

Reubicamos o cambiamos de posición cada parte del rectángulo de modo que se logre realizar un cuadrado perfecto; entonces, obtenemos este gráfico:



Los rectángulos de la figura de la página anterior ahora forman un cuadrado más un cuadrado adicional de color rojo para que sea un cuadrado perfecto, ese correspondería al cuadrado cuya área es $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Por lo tanto, hemos completado el cuadrado.

Al sumar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ al binomio original planteado $x^2 + bx$, hemos creado un cuadrado con lados $x + \frac{b}{2}$.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Hay que tomar en cuenta que al área del cuadrado que hemos creado la podemos expresar como la suma de todas las áreas obtenidas de sus cuadrados interiores. Así tenemos:

$$= x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + 2\left(\frac{b}{2}x\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ahora apliquemos a un ejemplo práctico la completación de cuadrados.

Dada la función cuadrática, encontremos las raíces de la ecuación, la gráfica y las características principales:

$$f(x) = x^2 - 1 + 1$$

Como el ejemplo nos pide las raíces de la ecuación, lo que nos está pidiendo no es otra cosa que las intersecciones con eje X, donde la gráfica cruza con el eje X. Esto es el valor de y para cualquier punto en el eje X sea cero. Entonces, lo que debemos hacer es igualar la función a cero $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Ahora, procedemos a reescribir la ecuación de lado izquierdo de modo que obtenga la forma $x^2 + bx$, para proceder a prepararla para completar el cuadrado.

$$x^2 - 4x = -1$$

Como lo demostramos anteriormente, lo que vamos a sumar para completar el cuadrado es la expresión $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Como se trata de una ecuación por criterio de igualdad, lo que hacemos de un lado de la expresión, también debemos hacer al otro lado de la expresión. Entonces nos quedaría:

$$x^2 - 4x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -1 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Conocemos que el valor de b de la expresión es igual a -4, por lo que nos resulta:

$$x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = -1\,x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 3$$

Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación como un binomio elevado al cuadrado.

$$(x - 2)^2 = 3$$

A partir de esta igualdad, despejamos la variable x. Para eso, debemos sacar la raíz cuadrada de ambos lados. Trabajamos con las dos raíces: la positiva y la negativa

$$x - 2 = \sqrt{3} \quad \text{o} \quad x - 2 = -\sqrt{3}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} \qquad x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{3}$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{3}$$

Hemos encontrado las raíces de la función cuadrática por medio de completación de cuadrados. A su vez, estas raíces son solución de la ecuación. Ahora debemos graficar y encontrar las características principales.

Para graficar, debemos encontrar el vértice de la función y su concavidad; así, el valor de , por lo que le hace cóncava hacia arriba. Su vértice sería:

$$\text{SI } f(x) = x^2 - 4X + 1$$

$$V_x = -\frac{b}{2a}$$

$$a = 1, b = -4, c = 1,$$

$$V_x = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

Encontramos la coordenada del vértice Y evaluando el vértice de coordenada en X en la respectiva función, es decir: $V_y = f - \left(\frac{b}{2a}\right)$.

Así, tenemos:

$$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 1$$

$$= 4 - 8 + 1$$

$$= -5$$

Entonces, su vértice sería: V: $(2, -5)$.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

2.3. Raíces de la función cuadrática

DCD: M.4.1.60. Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas.

Haremos un breve repaso de la función cuadrática, para ello recordaremos que:

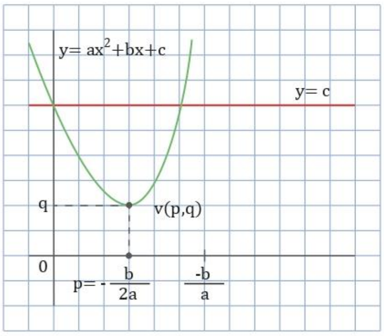
Elementos de la parábola

A continuación, mostraremos cómo podemos obtener analíticamente los elementos más característicos de la parábola, que resulta de representar gráficamente una función cuadrática, cuya expresión algebraica es:

$$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

Coordenadas del vértice

Observa la figura.



Los puntos en que la parábola $y = a\,x^2 + b\,x + c$ corta a la recta $y = c$, los obtenemos resolviendo el siguiente sistema.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases}$$

Podemos simplificar: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$.

Por simetría, observamos que la abscisa del vértice es el punto medio p.

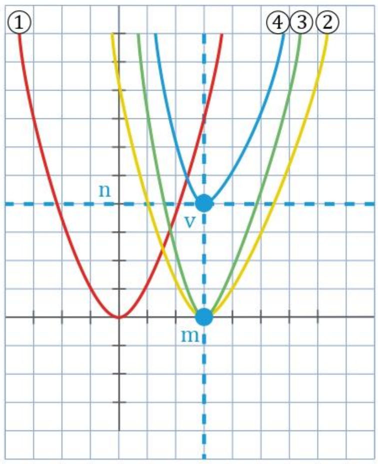
$$p = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Así pues, la abscisa del vértice, que coincide con la ecuación del eje de la parábola, es: $x = -\frac{b}{2a}$.

Una vez obtenido el valor de la abscisa, lo sustituimos en la ecuación de la parábola para hallar el correspondiente valor de la ordenada del vértice; $q = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Observa, en la siguiente figura, las transformaciones llevadas a cabo para la parábola

$$y = x^2$$

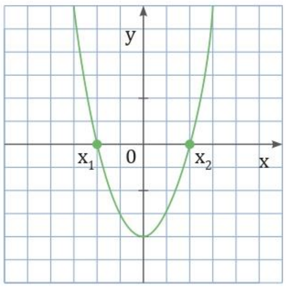


Ecuación	Vértice
1. $y = x^2$	(0, 0)
2. $y = (x - m)^2$	(m, 0)
3. $y = a\,(x - m)^2$	(m, 0)
4. $y = a\,(x - m)^2 + n$ $a = k$	(m, n)

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Puntos de corte con el eje OX

Observa la figura.



Los puntos de corte de la parábola con el eje OX son los puntos de coordenadas

(x, y) cuando $y = 0$. Además, sabemos que:

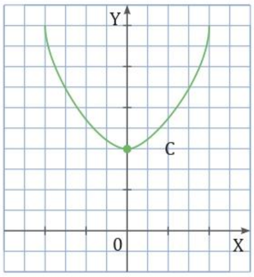
$y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Así, las coordenadas de los puntos de corte con el eje $0X$ son de la forma $(x, 0)$, en los que el valor de x viene dado por las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Recuerda que si el discriminante (b2 - 4ac) de la ecuación de segundo grado es negativo, la ecuación no tiene solución y, por tanto, la parábola no corta el eje $0X$.

Punto de corte con el eje OY

Observa la figura.



El punto de corte de la parábola con el eje OY es el punto de coordenadas (x, y) cuando $x = 0$.

$$x = 0 \rightarrow y = a.\, 0^2 + b.\, 0 + c = c$$

Por lo tanto, el punto de corte es el de coordenadas $(0, c)$.

Ejemplo 10

Encontremos las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de la parábola

$y = x^2 + 6\,x - 1.$

Calculamos los puntos de corte con el eje $0X$. $y = 0$

$x^2 + 6\,x - 1 = 0 \Rightarrow$ aplicando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{40}}{2} = 0{,}16 \qquad x_2 = \frac{-6 - \sqrt{40}}{2} = -6{,}16$$

$$x_1 = 0{,}16 \qquad ; \qquad x_2 = -6{,}16$$

La parábola corta el eje $0X$ en los puntos $(0.16, 0)$ y $(-\,6.16, 0)$.
Calculamos los puntos de corte con el eje $0Y$.
Cuando $x = 0 \rightarrow y = -1$
La parábola corta el eje OY en el punto $(0, -1)$.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

2.4 Aplicaciones de las funciones cuadráticas

D.C.D. M.4.1.61. Resolver (con apoyo de las TIC) y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Resolución de ecuaciones de segundo grado utilizando las TIC

Vamos a ver cómo utilizar una hoja de cálculo para resolver ecuaciones de segundo grado, en el caso de que exista solución.

Abrimos una hoja de cálculo nueva. En ella vamos a escribir los comandos necesarios para resolver la ecuación de segundo grado $7x^2 + 12x - 4 = 0$.

	A	B
1	ECUACIONES DE 2º GRADO	
2		7x² + 12x - 4 = 0
3	a =	7
4	b =	12
5	c=	-4
6		
7	Discriminante =	256
8	¿Tiene solución?	SI
9		
10	SOLUCIONES	
11	x1=	0,29
12	x2=	-2

Escribimos en las primeras celdas los rótulos para el nombre de la hoja de cálculo, la ecuación a resolver…

En las celdas B3, B4 y B5 introducimos, respectivamente, los valores de los coeficientes a, b y c de la ecuación de segundo grado.

En la celda B7 escribiremos la fórmula que nos da el discriminante, $\Delta = b^2 - 4.\ a.\ c$. Recordemos que una ecuación de segundo grado tendrá solución únicamente si el discriminante es mayor o igual que cero. La fórmula que debemos introducir en la celda es: $= B4^2 - 4 \cdot B3 \cdot B5$.

Para saber si la ecuación tiene solución escribiremos en la celda B8 una fórmula que devolverá el valor «SI» si se cumple la condición $B7 \geq 0$ y el valor «NO» en caso contrario.

$$= \text{SI (B7 >= 0; "SI"; "NO")}$$

A las soluciones de una ecuación de segundo grado las podemos calcular mediante la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Escribiremos en las celdas B11 y B12 las expresiones correspondientes al signo + y al signo – respectivamente, y recordaremos que ya hemos calculado el discriminante en la celda B7.

Celda B11: $= \dfrac{(-\text{B4} - \text{RAÍZ (B7)})}{2 \cdot \text{B3}}$

Celda B12 : $= \dfrac{(-\text{B4} + \text{RAÍZ (B7)})}{2 \cdot \text{B3}}$

Ya tenemos una hoja de cálculo para resolver ecuaciones de segundo grado. Operaremos con ella introduciendo los coeficientes de la ecuación en las celdas de entrada. Si existe solución, se nos mostrará en las celdas de resultado.

Mundo Digital

1. Investiga datos numéricos sobre el puente Golden Gate cuyos cables tierne forma de una parábola.
2. Responde: ¿Cuál es la altura de los cables a una distancia de 1 000 pies del centro del puente?
3. realiza un esquema con los datos que investigates. Coloca el origen de los ejes cartesianos en el vértice para que utilices como ecuación de segundo grado $y = ax^2$; $a>0$.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Resolución de problemas

El procedimiento para resolver problemas mediante una ecuación de segundo grado es muy parecido al utilizado para resolver problemas mediante una ecuación de primer grado con una incógnita o un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

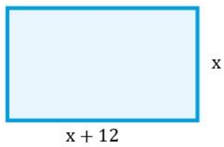
Cuando calculamos ecuaciones de segundo grado, debemos prestar especial atención al análisis de las soluciones, ya que algunas de ellas, a pesar de ser solución de la ecuación, no lo son del problema.

Fijémonos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13

La base de un rectángulo mide 12 cm más que su altura y su área es de 405 cm^2. ¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo?

1. Lectura atenta del enunciado: Volvemos a leer el problema e interpretamos el enunciado.
2. Elección de la incógnita: Representamos por x la altura del rectángulo.



3. Planteamiento de la ecuación
   - **Datos**: Área del rectángulo: 405 cm^2.
   - **Condición**: La base del rectángulo mide 12 cm más que su altura.
   - **Traducción**: Base del rectángulo: $x + 12$.
   - ***Área del rectángulo***: $(x + 12) \cdot x$.
   - **El área del rectángulo es de** 405 cm^2: $(x + 12) \cdot x = 405$.
4. Resolución de la ecuación

$$(x + 12) \cdot x = 405$$
$$x^2 + 12x = 405$$
$$x^2 + 12x - 405 = 0$$
$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-405)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 1620}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{1764}}{2}$$
$$= \frac{-12 \pm 42}{2} = \begin{cases} \dfrac{-12 + 42}{2} = 15 \\ \dfrac{-12 - 42}{2} = -27 \end{cases}$$

5. Respuesta

Como x representa la altura del rectángulo, tomará valores positivos, por lo que la solución negativa no es válida. Así, la altura del rectángulo es 15 cm y su base:

$$15 + 12 = 27 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo es:

$P = 2 \cdot 27 + 2 \cdot 15 = 84$ cm

6. Comprobación

Como la altura del rectángulo es 15 cm y su base 27 cm, se cumple que: $27 \cdot 15 = 405$ cm^2.

Trabajo individual

1. Calcula las dimensiones de un rectángulo de 24 m^2 de área sabiendo que su perímetro es 20 m.
2. Calcula los lados de un rectángulo que tiene una diagonal de 5 cm y un perímetro de 14 cm.
3. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es 2 cm más corto que la hipotenusa y esta mide 4 cm más que el cateto menor. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?
4. La base de un rectángulo es 2 m mayor que la altura. Si a la base le aumentamos 1 m y a la altura 2 m, resulta otro rectángulo cuya área es 24 m^2 mayor que el primero. Calcula las dimensiones de este.
5. La suma de la base con la altura de un triángulo es 30 m y el área del triángulo es 112 m^2. Calcula la base y la altura del triángulo.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

3. Probabilidad
3.1. Definición de probabilidad

DCD. M.4.3.9. Definir la *probabilidad* (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.

Experimentos deterministas y experimentos aleatorios

Si observamos algunos de los experimentos o fenómenos que ocurren a nuestro alrededor, comprobaremos que, para algunos de ellos, podemos predecir o determinar el resultado.

En cambio, otros son imprevisibles, es decir, resulta prácticamente imposible predecir o determinar su resultado.

Fíjate en los siguientes experimentos y comprueba si es posible predecir el resultado o no.

 http://goo.gl/qsQfwg	 https://goo.gl/mnlv79
Lanzar un dado y observar la puntuación de la cara superior.	Averiguar el tiempo que tarda un automóvil en recorrer una distancia si conocemos su velocidad constante.

 http://goo.gl/dMpCGS	 http://goo.gl/TPtb9g
Adivinar el número que saldrá premiado en el próximo sorteo de la lotería de Navidad.	Extraer una manzana al coger una fruta de una cesta que solo contiene naranjas.

En los experimentos segundo y cuarto, podemos determinar su resultado antes de realizarlos, mientras que en el primero y en el tercero, no los podemos predecir.

Tenemos así experimentos deterministas y experimentos aleatorios.

Los experimentos deterministas son aquellos en los que es posible predecir el resultado antes de que se realicen.

Los experimentos aleatorios son aquellos en los que no es posible predecir el resultado antes de que se realicen.

Ejemplo 9

Indiquemos los sucesos elementales y el espacio muestral del experimento Lanzar un dado de seis caras.

Sucesos elementales:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

Espacio muestral:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Trabajo individual

1. Indica cuáles de los experimentos siguientes son aleatorios y cuáles no.
   a. Extraer una carta de una baraja española y observar de qué palo es.
   b. Calentar una olla con agua y observar a qué temperatura hierve el agua.
   c. Extraer una bola de una funda opaca que contiene bolas azules y observar su color.
   d. Extraer una bola de una funda opaca que contiene bolas rojas, azules y violetas, y mirar su color.
   e. Lanzar una moneda trucada que siempre sale cara al lanzarla.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Espacio muestral

Para estudiar un experimento aleatorio, debemos conocer, en primer lugar, todos los posibles resultados que pueden darse.

Suceso elemental es cada uno de los resultados posibles que podemos obtener en un experimento aleatorio. El espacio muestral, representado por la letra Ω, es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

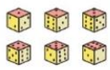
Ejemplo 10

Indiquemos el espacio muestral y los sucesos elementales de cada uno de los siguientes experimentos.

a. Lanzar un dado.

b. Tirar una moneda.

c. Elegir un color para jugar al parchís.

Experimento	Sucesos elementales	Espacio muestral
Lanzar un dado		$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Tirar una moneda		$\Omega =$ {cara, cruz}
Elegir un color para jugar al parchís		$\Omega =$ {rojo, verde, amarillo, azul}

Generalmente, al hablar de un dado, nos referimos al dado de seis caras con forma de cubo. Sin embargo, también existen dados con otras formas: tetraedro, octaedro, dodecaedro.

Sucesos

A menudo, lo que nos interesa de un experimento aleatorio es estudiar aspectos particulares de dicho experimento.

Llamamos suceso a cada uno de los aspectos que pueden estudiarse de un experimento aleatorio. Corresponde con una parte del espacio muestral Ω.

Ejemplo 11

Señalamos distintos sucesos en el experimento lanzar un dado y observar el resultado.

Algunos aspectos o sucesos que pueden estudiarse de este experimento son:

a. Obtener un número impar.

b. Obtener un número mayor que 2.

c. Obtener un 4.

Los resultados que caracterizan cada uno de los sucesos son:

a. Obtener un número impar, $A = \{1, 3, 5\}$.

b. Obtener un número mayor que 2, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

c. Obtener un 4, $C = \{4\}$.

Al símbolo $\emptyset$ lo leemos «conjunto vacío» y es el conjunto que no tiene ningún elemento.

Decimos que se verifica o que ocurre un suceso cuando, al realizar un experimento, el resultado es uno de los que caracterizan este suceso.

De entre todos los sucesos que podemos definir al realizar un experimento aleatorio, hay algunos que tienen características especiales. A continuación, describiremos los más importantes: suceso seguro, suceso imposible, suceso contrario, sucesos compatibles y sucesos incompatibles.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Suceso seguro y suceso imposible

Puede ocurrir que, sea cual sea el resultado de un experimento, este suceso ocurra con absoluta certeza, o bien, que no ocurra.

Suceso seguro es el suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento aleatorio. Coincide con el espacio muestral Ω.

Suceso imposible es el suceso que no ocurre jamás al realizar el experimento aleatorio. Lo representamos con el símbolo $\emptyset$.

Ejemplo 12

Señalamos un suceso seguro y uno imposible en el experimento de lanzar un dado y observar el resultado.

Consideremos el suceso A: Obtenemos un número menor o igual a 6, y escribimos el conjunto de los resultados favorables a este suceso.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

Observamos que este suceso contiene todos los resultados posibles del experimento y, por tanto, coincide con el espacio muestral. Es un suceso seguro.

Si consideramos ahora el suceso B: Obtener un 7, este suceso no tiene ningún resultado favorable. Es un suceso imposible. Escribiremos: $B = \emptyset$.

Suceso contrario

En el experimento de lanzar un dado, consideramos los sucesos A: Obtener un número par, y B: Obtener un número impar, y escribimos el conjunto de los resultados favorables a cada uno de los sucesos.

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{1, 3, 5\}$$

Observa que el suceso B está formado por todos los resultados del experimento que no están en A, y por lo tanto, estos sucesos no se verifican simultáneamente.

Sea cual sea el resultado en el experimento de lanzar un dado, al suceso B lo verificaremos si no se verifica el suceso A.

El suceso contrario a un suceso A es aquel al que lo verificamos siempre y cuando no se verifica A, y se representa mediante A^c.

Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

Si tenemos un experimento aleatorio con varios sucesos definidos, puede ocurrir que, al obtener un resultado, verifiquemos simultáneamente más de uno de los sucesos considerados.

Dos sucesos son compatibles si los podemos verificar a la vez. Caso contrario, son incompatibles.

Los sucesos compatibles tienen algún resultado en común, y los incompatibles, ninguno.

Ejemplo 13

Señalamos en el ejemplo 9 de la página 233, los sucesos compatibles, incompatibles y el suceso contrario de B.

Los sucesos A y B tienen resultados favorables comunes, 3 y 5, por lo que son sucesos compatibles.

Los sucesos B y C también son compatibles, porque tienen en común el resultado 4.

Los sucesos A y C no tienen ningún resultado en común, por lo que son incompatibles.

El suceso contrario de B es el formado por los resultados que no están en $\bar{B}$, es decir, = {1, 2}.

Trabajo individual

1. Escribe el espacio muestral del experimento: Tirar un dado con forma de tetraedro (fig. 1) y anota la puntuación que se obtiene.
2. Determina el espacio muestral del experimento: Sacar una bola de una funda opaca que contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5.
3. Determina, para cada uno de los siguientes espacios muestrales, un posible experimento aleatorio realizado.
   a. $\Omega = \{123, 124, 13, 4, 5, 6\}$
   b. $\Omega =$ {rojo, amarillo, azul}
   c. $\Omega = \{cc, cx, xc, xx\}$,
   d. $c =$ salir cara, $x =$ salir cruz

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

3.2. Métodos de conteo

DCD. M.4.3.10. Aplicar métodos de conteo (combinaciones y permutaciones) en el cálculo de probabilidades.

Combinatoria

Hasta ahora, hemos efectuado el recuento de posibilidades a partir del diagrama en árbol, y hemos aplicado el principio multiplicativo en los casos en los que ha sido posible.

Sin embargo, estas técnicas no resultan prácticas cuando el número de configuraciones es elevado y, sobre todo, cuando el diagrama no es regular.

Existen técnicas de recuento de posibilidades alternativas al diagrama en árbol, no tan intuitivas, pero mucho más prácticas. La combinatoria se ocupa de su estudio.

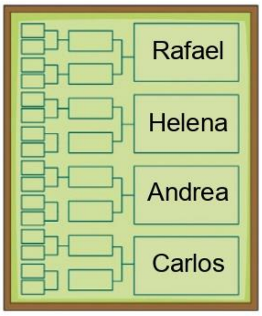
La combinatoria es la parte de la matemática cuyo objetivo es estudiar las configuraciones posibles en los problemas de contar, así como las técnicas necesarias para poder contarlas.

Estudiemos, a continuación, algunas de las técnicas para contar más usuales:

Variaciones, permutaciones y combinaciones.

Ejemplo 15

En un campeonato de tenis, los cuatro jugadores que han llegado a las semifinales son: Rafael, Carlos, Helena y Andrea. Si solo los finalistas reciben trofeo, ¿de cuántas maneras pueden repartirse los dos premios? Confeccionamos el diagrama en árbol para obtener el número de configuraciones posibles.



Campeón	Subcampeón	Configuración
Rafael	Carlos	Rafael - Carlos
	Helena	Rafael - Helena
	Andrea	Rafael - Andrea
Carlos	Rafael	Carlos - Rafael
	Helena	Carlos - Helena
	Andrea	Carlos - Andrea
Helena	Rafael	Helena - Rafael
	Carlos	Helena - Carlos
	Andrea	Helena - Andrea
Andrea	Rafael	Andrea - Rafael
	Carlos	Andrea - Carlos
	Helena	Andrea - Helena

Obtenemos 12 configuraciones posibles.

Fíjate en que cada configuración está formada por dos jugadores de los cuatro posibles. Importa el orden de colocación, ya que no es lo mismo quedar primero que segundo y, además, no hay repetición de premios, puesto que no puede quedar primero y segundo un mismo jugador.

Decimos que estas configuraciones son variaciones ordinarias o sin repetición de cuatro elementos tomados de dos en dos.

Trabajo individual

1. Queremos pintar una bandera formada por tres franjas verticales de tres colores diferentes. Si disponemos de pintura roja, azul, gris, verde y negra, ¿cuántas banderas podemos crear?

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

UNIDAD 4

CONTENIDO:

- Estadísticas
- Medidas de tendencia central
- Medidas de dispersión para datos no agrupados
- Medidas de dispersión para datos agrupados

10
décimo
año

1. Medidas estadísticas

1.1. Medidas de tendencia central

DCD. M.4.3.7. Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) y medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

La etapa final de un estudio estadístico es el análisis de los datos recogidos con el fin de extraer conclusiones que puedan ser de interés.

En el caso de la estadística unidimensional, la información contenida en tablas y gráficos puede ser descrita mediante ciertos valores, denominados parámetros o medidas estadísticas. Estas medidas pueden ser de centralización, de dispersión o de posición.

El objetivo principal de las medidas de tendencia central es poder representar por medio de un solo número al conjunto de datos, es decir, dar valores representativos de la distribución de frecuencias, situados en algún lugar intermedio, alrededor del cual, se encuentran los otros valores. Nos indican dónde tienden a concentrarse los valores.

Las medidas de centralización son valores considerados representativos de la serie de datos. Los más utilizados son: la moda, la media aritmética y la mediana.

Parámetros de centralización en

Los más usuales son la moda, la media aritmética y la mediana. Recordemos sus definiciones y cómo se calculan según se trate de datos agrupados o no.

— Moda: Es el valor de la variable con mayor frecuencia absoluta. Se representa por Mo.

Si los datos están agrupados en intervalos, se toma como valor aproximado de la moda la marca de clase del intervalo con mayor frecuencia absoluta, que se llama clase modal.

Puede ocurrir que la moda no sea única, es decir, que haya más de un valor con la frecuencia máxima. Se habla entonces de distribuciones bimodales, trimodales.

Para obtener el valor de la moda, basta observar en la tabla de frecuencias correspondiente el valor de la variable (o el intervalo de clase si los datos están agrupados) con mayor frecuencia absoluta.

Así, para los datos de la primera tabla 3, la moda es 2.

Número de hijos de las familias de cuarenta estudiantes de 1.° de Bachillerato

Número de hijos (x_i)	Frecuencia absoluta (n_i)
1	7
2	14
3	9
4	8
5	2

Duración (en horas) de treinta focos

Número de horas	Frecuencia absoluta (n_i)
(310, 420)	1
(420, 530)	9
(530, 640)	11
(640, 750)	5
(750, 860)	3
(860, 970)	1

En el caso de la segunda tabla 4, la clase modal es (530, 640) y tomaremos como valor aproximado de la moda su marca de clase: 585.

— Media aritmética: Es el valor que se obtiene al dividir la suma de todos los valores de la variable entre el número total de estos. Se representa por $\bar{x}$.

Calculamos mediante la expresión:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot n_i}{N} = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot f_i$$

Así, para los datos de la tabla 3:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 7 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 2}{40} = \frac{104}{40} = 2{,}6$$

Análogamente obtenemos, para los datos de la tabla 4, $\bar{x} = 596$.

Donde: x_i : Variable (marca de clase); n_i: Frecuencia absoluta; N : Número de datos.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

— Mediana: Es el valor que ocupa el lugar central en un conjunto ordenado de datos. Se representa por Me.

El cálculo de la mediana solo tiene sentido para variables cuantitativas.

Cuando el número de datos es impar, la mediana es el valor central de la serie ordenada de datos. Si es par, no existe un valor que ocupe el lugar central de la lista, sino dos. En este caso, tomaremos como mediana el valor promedio de ambos.

Así, en la siguiente serie de datos:

$$20, 20, 23, 23, 25, 25, 25, 26, 29$$

la mediana es 25, mientras que en la serie:

$$20, 20, 23, 23, 24, 25, 25, 25, 26, 29$$

la mediana es:

$$\frac{24 + 25}{2} = 24{,}5$$

Podemos obtener también la mediana a partir de la tabla de frecuencias.

Para ello, basta observar en la columna de frecuencias absolutas acumuladas si existe un valor igual a $\frac{N}{2}$.

- En este caso, la mediana es el promedio entre dicho valor y el siguiente.
- En caso contrario, la mediana es el primer valor cuya frecuencia absoluta acumulada es mayor que $\frac{N}{2}$.

Busca en Internet videos tutoriales para hallar la mediana de un conjunto de datos usando el progrma excel.

Halla la mediana de los siguientes datos (estaturas de personas):

2.03m, 1.56m, 1.48m, 1.72m, 1.67m, 1.57m, 1,83m, 1.76m, 1.55m,

Ejemplo 1

Calculemos la mediana de la distribución de la siguiente tabla.

x_i	n_i	N_i
1	7	7
2	13	20
3	10	30
4	7	37
5	3	40

El número total de individuos es $N = 40$. Luego el valor de $\frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$.

Existe una frecuencia absoluta acumulada que coincide exactamente con $\frac{N}{2}$.

En este caso, la mediana es el promedio entre el valor de la variable con esta frecuencia y el siguiente:

$$\text{Me} = \frac{2 + 3}{2} = 2{,}5$$

Ejemplo 2

Calculemos la mediana de la distribución de la siguiente tabla.

x_i	n_i	N_i
1	7	7
2	14	21
3	9	30
4	8	38
5	2	40

El número total de individuos es $N = 40$. Luego el valor de $\frac{N}{2}$ es:

$$\frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

La primera frecuencia absoluta acumulada mayor que 20 es 21. La mediana será el valor de la variable con esta frecuencia acumulada, es decir, 2.

$$\text{Me} = 2$$

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Si los datos están agrupados en intervalos, el intervalo que contiene a la mediana se denomina clase medianal. La marca de clase de este intervalo puede tomarse como valor aproximado de la mediana, aunque esta puede determinarse con mayor precisión a partir de la expresión:

$$Me = L_i + h \cdot \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i}$$

siendo:

— L_i, el extremo inferior de la clase medianal.

— h, la amplitud de los intervalos de clase.

— N, el número de datos.

— N_{i-1}, la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a la clase medianal.

— n_i, la frecuencia absoluta de la clase medianal.

Ejemplo 3

Intervalo	Marca de clase	n_i	N_i
[310, 420)	365	1	1
[420, 530)	475	9	10
[530, 640)	585	11	21
[640, 750)	695	5	26
[750, 860)	805	3	29
[860, 970)	915	1	30

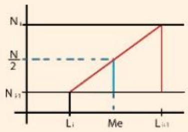
Calculemos la mediana de la distribución de la tabla sobre tiempo de duración de los focos.

En este caso $\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$ La primera frecuencia absoluta acumulada mayor que 15 es 21. Luego la clase medianal es $[530, 640)$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} L_i = 530 \\ h = 110 \\ N = 30 \\ N_{i-1} = 10 \\ n_i = 11 \end{array}\right\} Me = 530 + 110 \cdot \frac{15 - 10}{11} = 580$$

Esto significa que la mitad de los focos tiene una duración inferior a 580 h.

El valor de la mediana se puede obtener geométricamente aplicando el teorema de Tales a los triángulos de la figura.



Mundo Digital

Busca en Internet videos tuto- riales para hallar la media- na de un conjunto de datos usando el progrma excel.Halla la mediana de los si- guientes datos (estaturas de personas):2.03m, 1.56m, 1.48m, 1.72m, 1.67m, 1.57m, 1,83m, 1.76m, 1.55m,

Trabajo individual

1. Calcula la moda, la media aritmética y la mediana para los datos del ejercicio 4, página 209.

2. El número de faltas de ortografía cometidas por cuarenta estudiantes de 1.° de Bachillerato en un dictado se muestra en la siguiente tabla:

Número de faltas	0	1	2	3	4	5	6
Número de estudiantes	7	9	13	6	3	1	1

— Calcula la moda, la media aritmética y la mediana.

3. La siguiente tabla refleja la medida del tórax de un grupo de varones adultos. Calcula la moda, la media aritmética y la mediana.

Medida del tórax (cm)	Número de individuos
[80, 85)	9
[85, 90)	91
[90, 95)	509
[95, 100)	937
[100, 105)	694
[105, 110)	201
[110, 115)	31
[115, 120)	2

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

1.2. Medidas de dispersión para datos no agrupados

Los parámetros de dispersión de un conjunto de datos nos informan sobre la dispersión de los datos considerados, es decir, nos dicen si estos están más o menos separados.

Existen diferentes parámetros de dispersión. Los más utilizados son el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Recorrido

Es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la serie de datos. También se conoce como rango o amplitud, y se representa por r.

Así, si consideramos la serie de datos de la variable estadística que representa la edad de los dieciséis estudiantes de un curso de Astronomía, tenemos:

12 15 15 16 18 19 19 19 22 23 24 24 25 30 31 49

Por lo que el recorrido de esta serie de datos es:

$$r = 49 - 12 = 37$$

El recorrido es un parámetro fácil de calcular, pero que ofrece una información muy limitada. Así, nos da una idea de la amplitud del conjunto de datos, pero está muy influido por los valores extremos.

Desviación media

La desviación media es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media. Se representa por D_m.

En general, escribimos abreviadamente:

$$D_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}|}{N} \quad , \quad D_m = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$$ utilizar

Ejemplo 4

Calculemos la desviación media de la distribución: 5, 3, 7, 8, 5, 8, 5, 7, 9, 3, 3.

1. Calculemos la media aritmética del conjunto de datos:

$$\bar{x} = \frac{5+3+7+8+5+8+5+7+9+3+3}{11} = \frac{63}{11} = 5{,}7 \approx 6$$ (en la práctica no se aproxima la media aritmética)

2. Apliquemos la fórmula para calcular la desviación media:

$$D_m = \frac{|5-6|+|3-6|+|7-6|+|8-6|+|5-6|+|8-6|+|5-6|+|7-6|+|9-6|+|3-6|+|3-6|}{11}$$

$$D_m = \frac{1+3+1+2+1+2+1+1+3+3+3}{11} = \frac{21}{11} = 1{,}9$$

Trabajo individual

1. Son encuestados veinte matrimonios respecto a su número de hijos y se obtuvieron los siguientes datos:

   2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 0 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 2 ; 6 ; 2 ; 3; 2; 2.

   Halla la desviación media.

2. Los siguientes datos muestran el número de vuelos internacionales recibidos en el aeropuerto de la ciudad de Quito durante un mes, construye una tabla de distribución de frecuencias y halla la desviación media.

   10, 15, 10, 16, 15, 12, 12, 10, 15, 12, 12, 16, 10, 13, 12, 11, 10, 11, 15, 15, 16, 14, 14, 14, 10, 11, 10, 15, 15, 16.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

Varianza

Nos indica la variabilidad de los datos, es decir que tan alejados están los datos de su media.

Es la media aritmética de los cuadrados de las diferencias o desviaciones de cada dato hasta la media:

Varianza poblacional (para una población:
$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$

Varianza muestral

(para una muestra):

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N-1} - \bar{x}^2$$

El símbolo σ es la letra griega sigma. Corresponde a la «s» de nuestro alfabeto.

Desviación típica o desviación estándar

Es sin duda la medida de dispersión más importante, ya que sirve como medida previa al cálculo de otros valores estadísticos.

Una fórmula alternativa para el cálculo de la varianza es:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot n_i}{N} - x^2$$

Para obtener la varianza a partir de esta expresión, completamos la tabla de frecuencias con las siguientes columnas:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$

La desviación típica se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media de la distribución. Es decir: la raíz cuadrada de la varianza.

Para el caso de una población $\sigma = \sqrt{\frac{\sum |x - \bar{x}|^2}{N}}$

Para el caso de una muestra $s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N - 1}}$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5

La muestra obtenida de las puntuaciones en un examen por grupo de estudiantes es la siguiente: 6, 8, 10, 12, 14. Hallemos la desviación estándar de la muestra.

1. Hallemos la media del conjunto de datos: $\bar{x} = \frac{6 + 8 + 10 + 12 + 14}{5} = \frac{50}{5} = 10$

2.

x	6	8	10	12	14	
$\lvert x - \bar{x} \rvert$	4	2	0	2	4	
$\lvert x - \bar{x} \rvert^2$	16	4	0	4	16	= 40

Luego $s = \sqrt{\frac{40}{4}}$

Trabajo individual

1. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de estudiantes en un examen han sido las siguientes:

   15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13.

   a. Construye la tabla de distribución de frecuencias.

   b. Calcula las medidas de tendencia central de los datos.

   c. Halla la desviación típica.

2. El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por la siguiente serie:

   3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 3, 2, 3,5, 2, 3, 3, 3, 2, 5, 5, 2, 2, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 2, 4, 5.

   a. Construye la tabla de distribución de frecuencias.

   b. Halla la calificación promedio de los hoteles según la cantidad de estrellas.

   c. Calcula la desviación típica.

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción

1.3. Medidas de dispersión para datos agrupados

Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos, los parámetros de dispersión se calculan de esta manera.

Recorrido

En caso de que los datos estén agrupados en intervalos, suele considerarse como recorrido la diferencia entre el extremo superior del último intervalo y el extremo inferior del primero.

Desviación media, varianza y desviación típica: Consideramos las marcas de clase de los diferentes intervalos como diferentes valores de la variable x_i y sus frecuencias absolutas como n_i.

Desviación media: Es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media aritmética. Se representa por dm.

En general, escribimos abreviadamente:

x_i: valor de la variable

$\overline{x}$: media aritmética

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \overline{x}| \cdot n_i}{N}$$

n_i: frecuencia absoluta de x_i

N : número total de datos

Ejemplo 6

Calculemos el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la distribución de datos que recoge la tabla.

Intervalo de clases	[100, 120)	[120, 140)	[140, 160)	[160, 180)	[180, 200)	[200, 220)
n_i	5	6	15	18	17	5

Solución

Intervalos de clase	Marca de clase x_i	Frecuencia n_i	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert \cdot n_i$
[100, 120]	110	5	55,45	277,25
[120, 140]	130	6	35,45	212,70
[140, 160]	150	15	15,45	231,75
[160, 180]	170	18	4,55	81,90
[180, 200]	190	17	24,55	417,35
[200, 220]	210	5	44,55	222,75
	N = 66	N = 66		1443,70

$$d_m = \frac{1\,443,70}{66} = 21,87$$

—En este caso, puesto que los datos están agrupados por intervalos, el recorrido es la diferencia entre el extremo superior de último intervalo de clase y el extremo inferior del primer intervalo de clase. Luego, $r = 220 - 110 = 120$.

—Apliquemos la fórmula correspondiente para calcular la desviación media.

$$d_m = \frac{|110 - 165{,}45| \cdot 5 + |130 - 165{,}45| \cdot 6 + |150 - 165{,}45| \cdot 15 + |170 - 165{,}45| \cdot 18 + |190 - 165{,}45| \cdot 17 + |210 - 165{,}45| \cdot 5}{66} = 21{,}87$$

—Apliquemos la primera de las fórmulas para calcular la varianza.

$$\sigma^2 = \frac{|110 - 165{,}45|^2 \cdot 5 + |130 - 165{,}45|^2 \cdot 6 + |150 - 165{,}45|^2 \cdot 15 + |170 - 165{,}45|^2 \cdot 18 + |190 - 165{,}45|^2 \cdot 17 + |210 - 165{,}45|^2 \cdot 5}{66} = 712{,}67$$

—Puesto que $\sigma^2 = 712{,}67$ tendremos que la desviación tipica es $\sigma = \sqrt{712{,}67} = 26{,}70$.

Trabajo individual

1. Calcula la moda, la media aritmética y la mediana en la distribución de datos que aparece en esta tabla.

Intervalo de clases	[2, 8)	[8, 14)	[14, 20)	[20, 26)
n_i	6	14	7	3

Distribución gratuita. Prohibida su reproducción