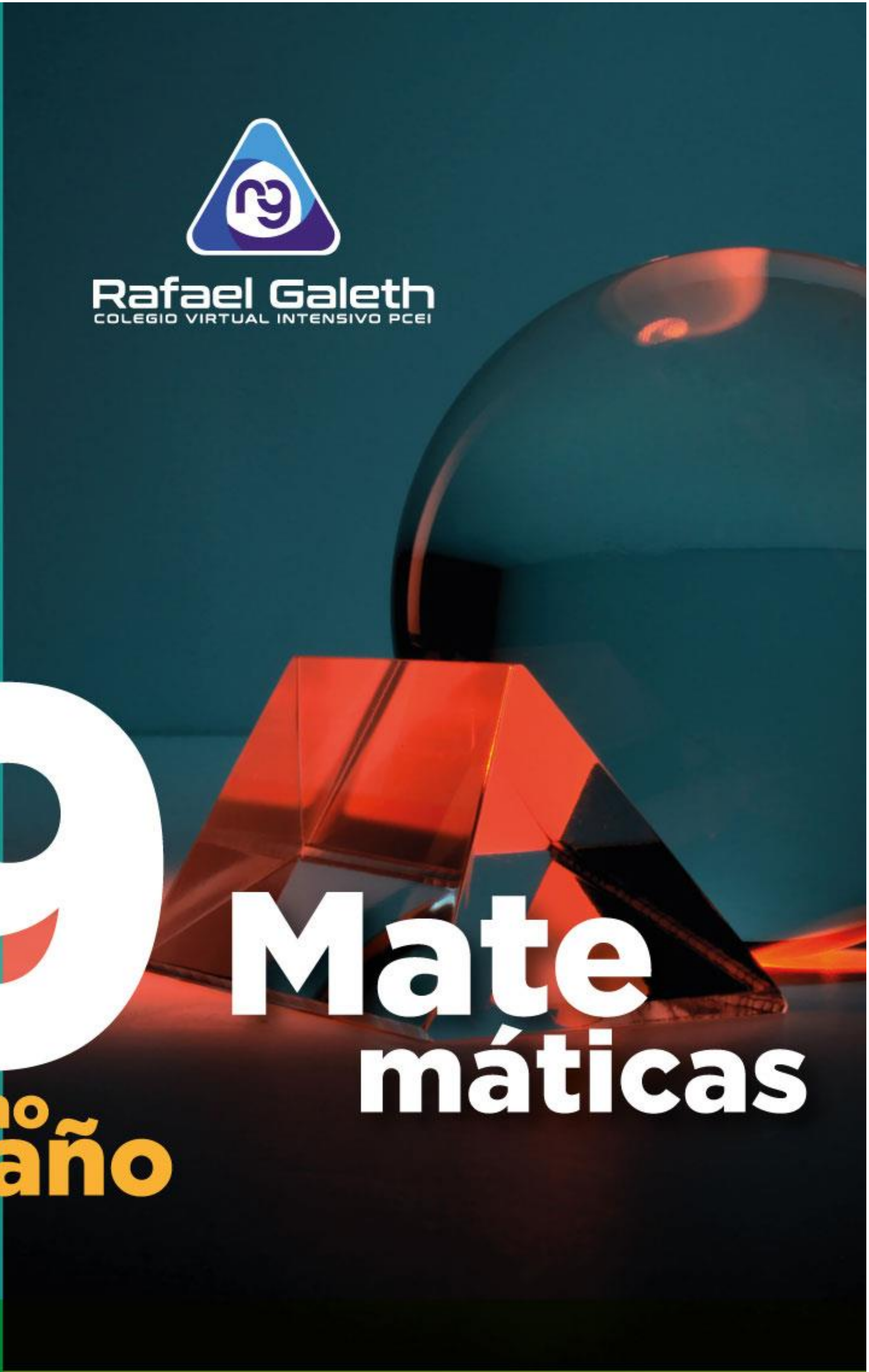
Rafael Galeth

COLEGIO VIRTUAL INTENSIVO PCEI



9 Matemáticas

noveno año

www.colegiopceirafaelgaleth.com

Ministerio de Educación

Equipo Técnico
Enoc Felipe Quishpe Guano
Duraymi Huete Chávez

ISBN: 978-9942-22-414-9

Equipo Técnico de Editorial Don Bosco
Gerente General de Editorial Don Bosco
Marcelo Mejía Morales

Dirección Editorial
Paúl F. Córdova Guadamud

Editora de área
Angelina Gajardo Valdés

Autores
Valeria Arias Dousdebes
Christian Ronald Armendariz Zambrano

Diseño y diagramación
Pamela Alejandra Cueva Villavicencio
Alexander Castro Cepeda
Israel Ponce Silva
Juan Fernando Bolaños Enríquez

Ilustración
Marco Antonio Ospina Belalcázar
Archivo Editorial Don Bosco

Edición 2023

Av. Amazonas N34-451 y Av. Atahualpa
Quito-Ecuador
www.educacion.gob.ec

Ministerio de Educación

República
del Ecuador

Ministerio de Educación

República del Ecuador

Esta obra es un extracto de título e ISBN 978-9942-22-419-9 del libro del Ministerio de Educación.

ÍNDICE DE CONTENIDOS NOVENO

UNIDAD 1

Unidad 1

UNIDAD 1

CONTENIDO:

- Introducción a los polinomios
- Propiedades básicas de los polinomios de primero y segundo grado
- Los números reales
- Propiedades de los números reales

9 noveno año

7. Introducción a los polinomios

7.1 Propiedades básicas de los polinomios de primero y segundo grado.

D.C.D.: M.4.1. 23, 24. Definir, reconocer y operar con polinomios de grado ≤ 2 (adición y producto por escalar) en ejercicios numéricos y algebraicos.

M.4.1.25. Reescribir polinomios de grado 2 con la multiplicación de polinomios de grado 1.

Un polinomio es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Siendo a_n, $a_{n-1}, \dots, a_1$, a_0 números, llamados *coeficientes*.

n un número natural.

x la variable o indeterminada.

a_o es el término independiente.

A una expresión algebraica que contenga dos términos la denominamos *binomio*.

$$3a + b^2 \qquad 4a^2 - 12ab \qquad (a + b)^2$$

Un *binomio* es una expresión algebraica que consta de una suma o una resta de dos términos.

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio P(x) es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable *x*.

Polinomio completo

Es aquel que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

Polinomio ordenado

Un polinomio está ordenado si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado.

Polinomios iguales

- Dos polinomios son iguales si verifican:
- Los dos polinomios tienen el mismo grado.
- Los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales.

Valor numérico de un polinomio

Es el resultado que obtenemos al sustituir la variable *x* por un número cualquiera.

Ejemplo 8

Observa y analiza los términos del siguiente polinomio

$$P(x) = 5 + 7x - 2x^2 + 23x^4$$

Término principal: $23x^4$

Término independiente: 5

Coeficientes: 5, 7, -2 y 23

Grado del polinomio: 4

Trabajo individual

1. De los siguientes polinomios identifique los términos

   a. $P(x) = 21 + 2^3 - 12x^2 + 3^x$

   Término principal: ____________________

   Término independiente: ______________

   Coeficientes: ________________________

   Grado del polinomio: ________________

   b. $P(x) = 7x - 5x^2 + 3x^3$

   Término principal: ____________________

   Término independiente: ______________

   Coeficientes: ________________________

   Grado del polinomio: ________________

   c. $P(x) = x^2 - 3x + 4x^2 + 2x^3$

   Término principal: ____________________

   Término independiente: ______________

   Coeficientes: ________________________

   Grado del polinomio: ________________

Operaciones con polinomios

Veamos cómo efectuar operaciones con polinomios.

Suma y resta de polinomios

Para sumar y restar dos polinomios, operamos los términos semejantes.

Ejemplo 9

Dados $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + x + 8$ y $Q(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x$, calculemos $P(x) + Q(x)$.

Comprensión

Para facilitar el cálculo, colocaremos los polinomios de forma adecuada.

Resolución

$$\begin{array}{rrrrrr} P(x) = & 3x^4 & & -2x^2 & +x & +8 \\ +\quad Q(x) = & x^4 & +2x^3 & -x^2 & +x & \\ \hline P(x) + Q(x) = & 4x^4 & +2x^3 & -3x^2 & +2x & +8 \\ \hline \end{array}$$

y $P(x) - Q(x)$:

$$\begin{array}{rrrrrr} P(x) = & 3x^4 & & -2x^2 & +x & +8 \\ +\quad Q(x) = & -x^4 & -2x^3 & +x^2 & -x & \\ \hline P(x) - Q(x) = & 2x^4 & +2x^3 & -x^2 & & +8 \\ \hline \end{array}$$

←(Cambiamos los signos).

La suma de polinomios tiene estas propiedades:

Asociativa:

$[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$

Conmutativa:

$P(x) + 0 = P(x)$

Elemento neutro:

$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

Elemento opuesto:

$P(x) + [-P(x)] = 0$

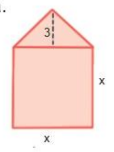
La multiplicación también cumple las propiedades asociativa y conmutativa, y tiene elemento neutro 1. Además, es distributiva respecto de la suma:

$$P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$$

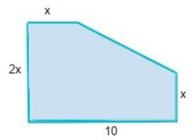
Trabajo individual

1. Exprese el perímetro de estas figuras con polinomios

a.



b.



Multiplicación y división de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos todos los términos del primero por los del segundo.

El método de la división es parecido a la división numérica. Observa esta división:

$$(6x^3 - 2x^2 + x + 3) : (x^2 - x + 1)$$

- Colocamos los polinomios y dividimos los términos de mayor grado; multiplicamos el cociente por los términos del divisor, restamos el resultado del dividendo y obtenemos el primer resto parcial.

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & -2x^2 & +x & +3 & x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5} -6x^3 & +6x^2 & -6x & & 6x \\ \cline{1-4} & 4x^2 & -5x & +3 & \end{array}$$

- Repetimos el proceso con el polinomio resultante hasta obtener un resto parcial de grado menor que el grado del divisor.

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & -2x^2 & +x & +3 & x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5} -6x^3 & +6x^2 & -6x & & 6x + 4 \\ \cline{1-4} & 4x^2 & -5x & +3 & \\ & -4x^2 & +4x & -4 & \\ \cline{1-4} & & -x & -1 & \end{array}$$

El resultado da $6x + 4$ y el resto, $R(x) = -x - 1$. La prueba de la división permitirá verificar que el resultado es correcto: cociente × divisor + resto = dividendo.

Ejemplo 10

Sean $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ y $Q(x) = x^2 + 1$, Calculemos: a. $P(x) \cdot Q(x)$; b. $P(x) : Q(x)$.

Comprensión

Para realizar la multiplicación y la división, debemos colocar correctamente los polinomios, dejando espacios en la posición correspondiente a los términos nulos.

Resolución

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & x^5 + 0x^4 & +2x^3 + 0x^2 & -x & -8 & \\ & & & & & x^2 + 1 & \\ \hline & & x^5 & +2x^3 & & -x-8 & \\ x^7 & +2x^5 & & -x^3 & -8x^2 & & \\ \hline x^7 & +3x^5 & & +x^3 & -8x^2 & -x & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^5 & +2x^3 & -x & -8 & x^2 + 1 \\ \cline{5-5} -x^5 & -x^3 & & & x^3 + x \\ \cline{1-2} & x^3 & -x & -8 & \\ & -x^3 & -x & & \\ \cline{2-4} & & -2x & -8 & \end{array}$$

Trabajo individual

1. Resuelva las siguientes multiplicaciones

   a. $(5x^2 + 4x + 1) \cdot (6x + 1)$

   b. $(8x^3 - 7x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1)$

   c. $\left[\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right]^2$

   d. $\left[x^4 + 4x^2 - \frac{1}{2}\right] \cdot \left[x^3 + \frac{1}{2}x\right]$

2. Realice las divisiones e indique el cociente y el resi¬duo de cada una:

   a. $(x^3 + 2x + 70) : (x + 4)$

   b. $(x^5 - 2x^2 - 3) : (x + 1)$

   c. $(x^6 + x) : (x + 3)$

   d. $(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) : (x - 3)$

   e. $(4x^3 - 5x) : (x - 2)$

   f. $(x^7 - x) : (x + 2)$

1. Los números reales
1.1 Propiedades de los números reales

D.C.D.: M.4.1.29. Aproximar números reales a números decimales para resolver problemas.

Aproximación decimal de un número irracional

Acabamos de ver que las expresiones decimales de los números irracionales constan de una parte entera y un decimal ilimitado no periódico.

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562\ 37\ldots$$

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 5\ldots$$

A la hora de operar con estos números o dar el resultado de un ejercicio, no podemos utilizar una cantidad infinita de cifras decimales, por lo que debemos tomar una aproximación, es decir, un número próximo al valor exacto.

Las aproximaciones pueden ser por defecto o por exceso. Así:

$$1{,}54 \xrightarrow{\text{Redondeo}} 1{,}5$$

Observemos que:

$$1{,}54 > 1{,}5$$

En este caso decimos que hemos efectuado una aproximación por defecto.

$$23{,}67 \xrightarrow{\text{Redondeo}} 23{,}7$$

Por otro lado, tenemos que:

$$23{,}67 < 23{,}7$$

En este caso decimos que la aproximación es por exceso.

Truncamiento y redondeo

Conozcamos dos formas de tomar aproximaciones de números reales, el truncamiento y el redondeo.

- **Aproximación por truncamiento**

  Suprimimos las cifras decimales, sin más, a partir de un orden dado.

- **Aproximación por redondeo**

  Observamos la primera cifra que debe suprimirse de acuerdo con el orden deseado y procedemos de este modo:

Número real	Orden de aproximación	Primera cifra suprimida	Aprox. por truncamiento	Aprox. por redondeo
2,241 53...	décimas	4	2,2	2,2
11,648 231...	centésimas	8	11,64	11,65
0,003 74	milésimas	7	0,003	0,004

- Si es menor que 5, la cifra inmediatamente anterior se deja igual.
- Si es mayor o igual que 5, añadimos una unidad a la cifra inmediatamente anterior.

Calculadora:

La calculadora ofrece un resultado aproximado debido a que trabaja con un número limitado de decimales. Observa estos cálculos.

- $\frac{53}{45}$

Teclea:

5 3 ÷

4 5 EXE

En la pantalla aparece:

Sin embargo, este es un resultado. El valor exacto de $\frac{53}{45}$ es 1,17, como puedes comprobar de este número decimal.

1,177777778

UNIDAD 2

CONTENIDO:

- Operaciones básicas con números reales
- Suma y multiplicación de números reales
- Radicación con reales
- Potencias de base real y exponente entero

9 noveno año

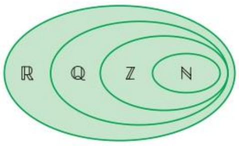
1.2 Operaciones básicas con números reales

D.C.D.: M.4.1. 28, 30 Reconocer el conjunto de los números reales y establecer relaciones de orden utilizando la recta numérica y la simbología matemática en comparaciones con datos obtenidos del entorno como medidas, precios, poblaciones, etc.

El conjunto de los números reales

La necesidad de resolver numerosos problemas aritméticos, geométricos y de la vida nos ha llevado a ampliar los conjuntos numéricos. Hemos avanzado de los números naturales a los enteros por la necesidad de la resta, de los enteros a los racionales por la necesidad de la división. Hemos encontrado a los números irracionales, al descubrir que existen decimales ilimitados no periódicos y que algunos de ellos son las raíces no exactas o ciertos números particulares como π.

Este conjunto recibe el nombre de *conjunto de los números reales* y lo representamos con el signo $\mathbb{R}$.



Reales ($\mathbb{R}$)
- racionales ($\mathbb{Q}$)
  - enteros ($\mathbb{Z}$)
    - naturales ($\mathbb{N}$)
    - cero
    - enteros negativos
  - fraccionarios
- irracionales

Los números reales engloban tanto a los números racionales Q como los irracionales. Dentro de Q se encuentran los números enteros Z y fraccionarios. Dentro de los números enteros se hallan los números naturales N = {1, 2, 3,…}, cero y los enteros negativos.

Número real	Expresión decimal
3	3,000
$\frac{22}{7}$	$3,142\ 857\ \overline{6}$
π	3,141 592 653 589 793 2…

Una vez representados los números racionales y los irracionales sobre una recta, ya no quedan puntos vacíos en ella. Los números reales la llenan por completo; de ahí el nombre de *recta real*.

Como vimos con los números racionales, los números reales también pueden ser escritos de forma ordenada en una recta.

Ordenación de los números reales

Puesto que a los números reales los podemos representar sobre una recta, es posible ordenar el conjunto de los números reales siguiendo el mismo criterio que el establecido en el conjunto de los números racionales.

Para saber si un número está después de otro o no en la recta real, debemos observar la expresión decimal de los números irracionales. Un ejemplo de esto es ubicar 3, y π.

Mundo Digital

Busca en Internet información sobre los números reales. Por ejemplo:

https://goo.gl/zDo3e7

¿Hay otro conjunto de números que no estén dentro de los reales?

Trabajo individual

1. Pon verdadero (V) o falso (F) a las siguientes proposiciones.

   a. El número $7,\overline{125}$ es un número irracional. ( )

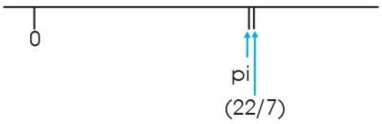
   b. La longitud de la circunferencia es un número irracional, ya que es el resultado de 2π r . ( )

   c. Las raíces de los números primos son números irracionales. ( )

   d. Los números decimales infinitos son irracionales. ( )

La expresión decimal de esos números es esta:

Fijándonos en los dígitos, podemos observar que 3 es el número más pequeño de los tres, lo que hace que vaya más hacia la izquierda en la recta, el número del medio es π y el mayor es $\frac{22}{7}$, aunque sea muy cercano a π. De hecho, este valor se utilizaba como aproximación de π en culturas antiguas.



Así como con los números cercanos a π, cualquier número real tiene su lugar en la recta. Si un número a es menor que un número b, escribimos a < b y representamos *a* más a la izquierda de la recta real que *b*.

Observemos la representación sobre una recta de los números reales $\sqrt{2}$ y 1,5.

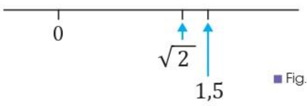


Fig. 2

Como 1,5 queda situado a la derecha de , concluimos que:

$$\sqrt{2} < 1{,}5$$

Dados dos números reales *a* y *b*, diremos que *b* es mayor que *a* si al efectuar su representación gráfica sobre la recta real, *b* queda situado a la derecha de *a*.

Intervalos de números reales

La ordenación de los números reales permite hablar del conjunto de estos números comprendidos entre dos de ellos, *a* y *b*.

A este conjunto lo denominamos *intervalo de extremos a* y *b*. Según si incluyen los extremos o no, los intervalos se clasifican en:

Características de los instrumentos de medida

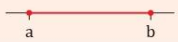
Sensibilidad: Mínima medida que el aparato puede realizar. Un instrumento es tanto más sensible cuanto más pequeña sea la cantidad que puede medir. Así, una balanza que aprecia miligramos es más sensible que otra que aprecia gramos.

Exactitud: Grado de coincidencia entre el valor medido y el real. Existen balanzas analíticas cuyos valores de exactitud en la lectura son de 0,1 mg.

Precisión: Grado de coincidencia de un conjunto de medidas efectuadas. Suele expresarse como tanto por ciento de la lectura efectuada. Por ejemplo, un termómetro con una precisión de ± 1% de 150 °C; es decir, ± 1,5 °C.

Cifras significativas: En la expresión de una medida, las cifras significativas son las que se consideran ciertas y una más, que se considera aproximada.

Intervalo cerrado



$[a, b]$

Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b*, incluidos los extremos.

Intervalo abierto

(a, b)

Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b*, sin incluir los extremos.

Intervalo semiabierto

[a, b) Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b*, incluido solo el extremo a.

(a, b] Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b*, incluido solo el extremo *b*.

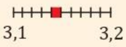
El espacio entre dos números en la recta se llama un *segmento de recta*.

Los segmentos de recta se clasifican en intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.

Un intervalo cerrado incluye ambos puntos que se encuentran en sus bordes, es decir, comprende todos los números mayores que *a* y menores que *b*, incluyendo a *a* y a *b*.

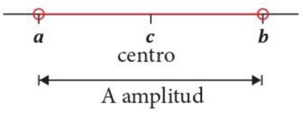
Los intervalos abiertos no incluyen ningún valor de la frontera, es decir, un intervalo abierto entre *a* y *b* es aquel que contiene números mayores a a, menores a *b*, pero no incluye *a* ni *b*. Finalmente, un intervalo semiabierto contiene *a* o *b*, pero no a ambos.

Los intervalos son muy útiles para representar gráficamente los números irracionales.



$3,14 < \pi < 3,15$

Observemos que, si el extremo está incluido en el intervalo, lo representamos mediante un pequeño círculo (●); si no está incluido, lo representamos mediante una pequeña circunferencia (○).



La distancia entre los dos extremos del intervalo se llama *amplitud del intervalo*. La calculamos como el valor absoluto de la diferencia entre los extremos.

$$A = d(a, b) = |a - b|$$

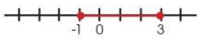
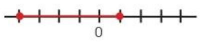
El punto que equidista de los dos extremos de un intervalo recibe el nombre de *centro del intervalo* y lo calculamos como la media aritmética de los valores de los extremos.

Trabajo individual

1. Escribe un intervalo abierto de centro -2 y amplitud igual a 8.
2. Representa los intervalos:

   $[-2,-1]$, $(-2,-1)$, $[-2,-1)$, $(-2,-1]$ y $|x| < |2|$.
3. Explica qué tipos de intervalos existen según incluyan a los extremos o no.
4. Responde: ¿Qué diferencia hay entre un intervalo abierto y uno semiabierto?
5. Representa los intervalos [-3, 4) y (1, 3). Colorea el trozo de recta común a ambos intervalos.

   — ¿Qué intervalo representa el trozo de recta coloreado?
6. Completa la tabla.

Representación	Intervalo
	$[-1, 3]$
	
	
	(2, 5)
	$[2, 5]$

7. Representa los intervalos:

   $[-2,-1]$, $(-2,-1)$, $[-2,-1)$, $(-2,-1]$ y $|x| < |2|$.
8. Representa los intervalos $[-1, 3]$ y $(2, 5)$. Colorea el trozo de recta común a ambos intervalos.

   — ¿Qué intervalo representa el trozo de recta coloreado?

1.3. Suma y multiplicación de números reales

D.C.D.: M.4.1. 31, 32 Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en *R* (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

El valor absoluto de un número real positivo o negativo es el número real que obtenemos al prescindir de su signo; lo representamos escribiendo el número real entre dos barras verticales.

$$8{,}432 = 8{,}432 \qquad 14 = 14$$

La principal novedad que presentan los números reales, desde el punto de vista de las operaciones, son las expresiones decimales infinitas de los números periódicos y de los irracionales, con las que no podemos trabajar.

Para sumar, restar, multiplicar y dividir con este tipo de números, es necesario escoger aproximaciones con expresión finita.

Adición de números reales

Para sumar dos números reales, sumamos las sucesivas aproximaciones decimales del mismo orden.

$\sqrt{3} = 1{,}732\ 050\ 80...;\quad \sqrt{8} = 2{,}828\ 427\ 12...$

$$+1{,}732\ 0 < \sqrt{3} < 1{,}732\ 1$$
$$+2{,}828\ 5 < \sqrt{8} < 2{,}828\ 5$$
$$+4{,}560\ 4 < \sqrt{3} + \sqrt{8} < 4{,}560\ 6$$

Por tanto, el número real suma es:

$$3 + 8 < 4{,}560.$$

Observemos que solo son correctas tres de las cuatro cifras decimales obtenidas al sumar las aproximaciones. Si queremos obtener la suma con un determinado orden de aproximación, debemos tomar algún orden más en los sumandos.

Propiedades de la suma de números reales

- **Conmutativa**: Si cambiamos el orden de los sumandos, el resultado no varía: .
- **Asociativa**: En una suma de varios sumandos, el resultado no depende de cómo agrupemos los términos: .
- **Elemento neutro**: El 0 es el elemento neutro de la suma, porque, al sumar 0 a cualquier número entero, obtenemos dicho número: .
- **Elemento opuesto**: El opuesto de un número real es el número real que sumado a él da 0: .

Suma de radicales

Solamente pueden sumarse (o restarse) dos radicales cuando son radicales semejantes, es decir, si son radicales con el mismo índice e igual radicando.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a + b + c)\sqrt[n]{k}$$

Desde la Historia

Richard Dedekind

Matemático alemán (1831 - 1916)

Entre sus contribuciones destacan la definición de número real y su análisis de la naturaleza de los números. Dedekind definió número real como un corte en el conjunto de los números racionales. Es decir, que todo número real es el límite de una sucesión de números racionales.

http://goo.gl/My9M3I

Multiplicación de números reales

Propiedades de la multiplicación de números reales

- **Conmutativa**: Si cambiamos el orden de los factores, el resultado no varía:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- **Asociativa**: En un producto de diversos factores, el resultado no depende de cómo los agrupemos:

$$(a \cdot b) \cdot c = a\,(b \cdot c)$$

- **Elemento unidad**: El 1 es el elemento unidad de la multiplicación porque, al multiplicar cualquier número entero por 1, obtenemos el mismo número:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- **Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma**:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Esta propiedad nos permite sacar factor común:

$$a \cdot b + a \cdot c \qquad a \cdot d = a \cdot (b + c \cdot d)$$

Al multiplicar un número racional por un número irracional, obtenemos un número irracional.

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Si multiplicamos un número irracional por otro número irracional, podemos obtener números irracionales o racionales.

$$\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$$
$$\sqrt{2}\,\sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2\,3} = \sqrt{3}$$

Multiplicación de radicales

Para multiplicar dos números reales, multiplicamos las sucesivas aproximaciones decimales del mismo orden:

$$\sqrt{6} = 2{,}449\,489\,74...;\ \pi = 3{,}141\,592\,65...$$

$$6 = 2{,}449\,4 < \sqrt{6} < 2{,}449\,5$$
$$x\ \ 3{,}141\,5 < \pi < 3{,}141\,6$$
$$7{,}694\,701 < x\pi < 7{,}695\,346\,2$$

Por tanto, el número real producto es:

$$6 \cdot \pi = 7{,}69.$$

Como en la adición, si queremos obtener el producto con un determinado orden de aproximación, debemos tomar algún orden más en los factores.

Producto de radicales. Radicales del mismo índice

Para multiplicar radicales con el mismo índice, multiplicamos los radicandos y dejamos el mismo índice.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación, extraeremos factores del radical si es posible.

Radicales de distinto índice

Primero reducimos a índice común y, luego, multiplicamos.

Ejemplo 1

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} \rightarrow$ m.c.m. $(2, 3, 4) = 12$

$$\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9}$$
$$= \sqrt[12]{3^{23}} = 3\sqrt[12]{3^{11}}$$

- $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} \rightarrow$ m.c.m.$(2 \cdot 3) = 6$

$$\sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3)^2}$$
$$= \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10} \cdot 3^7} = 6\sqrt[6]{2^4 \cdot 3}$$

Trabajo individual

1. Realice estas sumas.

a. $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

b. $\sqrt{108} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$

c. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$

2. Realice los productos.

a. $5\sqrt{3}$

b. $2\pi\sqrt{2}$

c. $\sqrt{5} \cdot \pi$

d. $2\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot 5\sqrt{96}$

1.5. Radicación con reales

D.C.D.: M.4.1. 34, 35 Calcular raíces cuadradas de números reales no negativos y raíces cúbicas de números reales aplicando las propiedades en R y reescribir expresiones numéricas o algebraicas con raíces en el denominador utilizando la racionalización.

Los radicales están estrechamente relacionados con las potencias. En este apartado veremos cómo se relacionan y aprenderemos a trabajar con expresiones en las que aparecen radicales o potencias de exponente racional.

Raíz enésima de un número real

Antes de iniciar el estudio de cualquier raíz de un número real, recordemos las características de las raíces cuadradas.

Sabemos que 5 elevado al cuadrado es 25,$5^2 = 25$, entonces la raíz cuadrada de 25 es igual a 5,$\sqrt{25} = 5$. Pero, como el cuadrado de -5 también es 25, $(-5)^2 = 25$, entonces la raíz cuadrada de 25 también es -5,$\sqrt{25} = 5$.

Las raíces cuadradas de un número real *b* son los números reales $+a$ y $-a$, si: $(+a)^2 = b$ y $(-a)^2 = b$.
Expresamos: $\sqrt{b} = \pm a$.

Observemos que *b* debe ser un número real mayor o igual que 0, ya que es una potencia par de + a y de - a. De este modo:

Si el radicando es positivo
Existen dos raíces cuadradas que son dos números reales opuestos. $\sqrt{25} = \pm 5$
Si el radicando es negativo
No existe ninguna raíz cuadrada real. $\sqrt{-3} = ?$

También conviene observar que si *b* es un número racional, su raíz cuadrada puede ser un número racional o irracional.

Si el radicando es un racional cuadrado perfecto
La raíz cuadrada son dos números racionales opuestos. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}$
Si el radicando no es un racional cuadrado perfecto
La raíz cuadrada es un número irracional. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0{,}816...$

Mundo Digital

Busca en Internet las raíces de números negativos e intenta justificar por qué no existe, en números reales, la raíz cuadrada de ellos. Puedes ingresar a este enlace web:

https://goo.gl/lpG3Hw

Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

Las raíces de índice diferente de 2 se definen de forma parecida a las raíces cuadradas.

Por ejemplo, el número 125 es el resultado de elevar al cubo el número 5. Así, el número 5 es la raíz cúbica de 125. Y el número –125 es el resultado de elevar al cubo el número –5. Así, el número –5 es la raíz cúbica de –125.

Radicales equivalentes, simplificación de radicales y reducción a índice común

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que, si multiplicamos el numerador y el denominador por un mismo número, la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Si multiplicamos o dividimos el índice y el exponente de un radical por un mismo número natural, obtenemos otro radical equivalente.

$$\sqrt[6]{256} = \sqrt{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

Simplificación de radicales

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, obtenemos un radical equivalente.

$$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 15

Simplificamos:

a. $\sqrt[3]{216}$

$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$

b. $\sqrt[5]{1\,024}$

$\sqrt[5]{1\,024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

Reducción de radicales a índice común

Reduzcamos estos radicales a índice común.

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} \qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2}$$

1. Hallamos el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice.

$$\text{m.c.m.}\ (2, 3, 4) = 12$$

2. Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes.

$$\sqrt[12]{2^6} \quad \sqrt[12]{2^6}$$

$$\sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} \quad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8}$$

$$\sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^2)^3} \quad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^6}$$

Mundo Digital

Prueba tu humor ingresando al enlace:

https://goo.gl/Tjsjrn

Trabajo individual

1. Calcula.

a. $\sqrt{64}$ c. $\sqrt[3]{-1728}$ e. $\sqrt[3]{-343}$

b. $\sqrt{-64}$ d. $\sqrt[5]{-243}$ f. $\sqrt[4]{\frac{1296}{256}}$

2. Simplifica.

a. $\sqrt[9]{64}$ c. $\frac{1}{2}\sqrt[9]{128}$ e. $3\sqrt[12]{64}$

b. $\sqrt[12]{x^9}$ d. $3\sqrt{48}$ f. $\sqrt[9]{27}$

2. Reduce al mínimo común índice.

a. $\sqrt[4]{3a}, \sqrt[5]{2b^2}, \sqrt[10]{7x^3}$

b. $\sqrt[6]{15m^3n^2}, \sqrt[3]{3m^2a}, \sqrt{2a}$

c. $\sqrt[8]{7}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$

d. $\sqrt[4]{8a^2x^3}, \sqrt[6]{2b^2}, \sqrt[10]{7x^3}$

e. $2\sqrt[10]{a^7b^2}, 3\sqrt[5]{a^3b^4}, \sqrt{2a}$

Extracción e introducción de factores en un radical

Para extraer factores fuera del signo radical descomponemos el radicando en factores. Si:

1. Un exponente es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando.

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3} \qquad \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

2. Un exponente es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando.

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

3. Si un exponente es mayor que el índice, dividimos dicho exponente por el índice. El cociente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando.

Para introducir factores en un radical, introducimos los factores elevados al índice correspondiente del radical.

Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Racionalización de radicales

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos, de los que veremos solo dos en este nivel.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo 16

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

1. Racionalización del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$; multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\,(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{b \cdot c}$$

Ejemplo 17

a. $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

b. $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

2. Racionalización del tipo $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

- Si *m* es mayor o igual que *n*, primero sacamos factores fuera del radical.
- Si *m* es menor que *n*, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$

Ejemplo 18

a. $\frac{a}{b^n\sqrt{c^m}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{m\,n}}}{b\sqrt[n]{c^m}\ \sqrt[n]{c^{m\,n}}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{m\,n}}}{b\sqrt[n]{c^m\ c^{m\,n}}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{m\,n}}}{b\sqrt{c^m}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{m\,n}}}{b\,c}$

b. $\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\ \sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$

Trabajo individual

1. Calcule.

a. $\sqrt{64}$ b. $\sqrt{-64}$ c. $\sqrt[3]{-1728}$ d. $\sqrt[5]{-243}$ e. $\sqrt[3]{-343}$

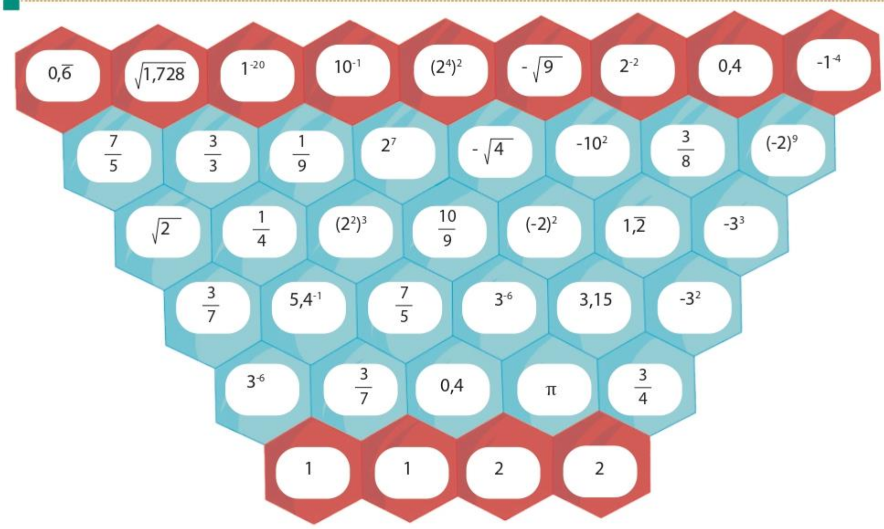
2. Simplifique.

a. $\sqrt[4]{9}$ b. $\sqrt[9]{27}$ c. $\sqrt[8]{81x^4y^8}$ d. $\sqrt[12]{64m^6n^{18}}$ e. $\sqrt[6]{343a^9b^{12}}$

3. Introduzca el coeficiente bajo el radical.

a. $3\sqrt{5}$ b. $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$ c. $5x^2y\sqrt{64m^6n^{18}}$ d. $(b+c)\sqrt[3]{\frac{b}{b+c}}$ e. $(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$

Trabajo colaborativo



El siguiente juego probará su habilidad para ordenar los números reales de menor a mayor. Para jugar necesitan:

- 2 fichas por jugador
- una moneda

¿Cómo jugar?

1. Para iniciar, tú y un compañero o compañera coloquen sus fichas en los hexágonos inferiores del tablero.
2. En cada turno, el jugador lanza la moneda. Si esta sale cara, debe mover una ficha hacia una casilla adyacente con un número mayor. Si sale cruz, debe mover la ficha hacia una casilla adyacente con un número menor.
3. Si al mover la ficha, un jugador llega a la misma casilla ocupada por el contrario, entonces el adversario es «comido» y debe regresar a la casilla inicial.
4. Si el jugador no puede moverse, pierde el turno.
5. Si el jugador comete un error y su adversario se da cuenta, el turno se anula. El jugador debe regresar y pierde el turno.
6. Gana el jugador que logre llevar sus dos fichas a la fila superior.

1.6. Potencias de base real y exponente entero

D.C.D.: M.4.1.34 Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros para la notación científica.

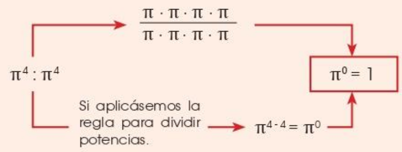
Potencias de base real y exponente entero negativo

Las potencias de base real y exponente entero positivo son justamente las potencias de base real y exponente natural que ya hemos visto. Pero ¿qué ocurre si el exponente es 0 o un número entero negativo?

A las potencias de exponente 0 o un número entero negativo las definimos de manera que las propiedades de las potencias de exponente natural continúen siendo válidas, en particular la propiedad de la división de potencias de la misma base.

Potencias de exponente 0

Consideramos la división $\pi^4 : \pi^4$.

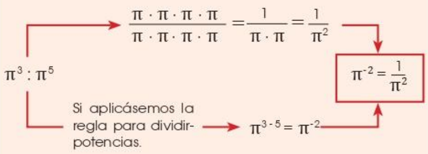


La potencia de base número real a, a ≠ 0, y exponente 0 es igual a 1.

$$a^0 = 1, \text{ con } a \neq 0$$

Potencias de exponente negativo

Consideramos la división $\pi^3 : \pi^5$.



La potencia de base número real a, a ≠ 0, y exponente un número entero negativo (-) es igual al inverso de la potencia de base a y exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Notación científica

Ya que resulta incómodo escribir números como 0,000 000 000 023 o 12 330 000 000, se inventó la notación científica. La notación científica utiliza potencias de 10 para representar los ceros que contiene un número, ya sea antes o después de la coma.

Los números anteriores quedarían como:

$$0{,}000\,000\,000\,023 = 2{,}3 \times 10^{-11}$$

$$12\,330\,000\,000 = 1{,}2 \times 10^{10}$$

Este tipo de escritura resulta mucho menos confusa y, como se trata de números concisos, no hay un error en el cual la persona olvida la cantidad de ceros que existen antes o después de la coma.

Mundo Digital

El producto y el cociente de números expresados en notación científica son inmediatos, mientras que, para sumar o restar, debemos escribirlos previamente de manera que la potencia de 10 sea la misma.

$2{,}7\ 10^5\ 8{,}2\ 10^4 =$

$2{,}7\ 8{,}2\ 10^{5+4} =$

$22{,}14\ 10^9 = 2{,}214\ 10^{10}$

$2{,}7\ 10^5 + 8{,}2\ 10^4 =$

$2{,}7\ 10^5\ 0{,}82\ 10^5 = 3{,}52\ 10^5$

Si quieres conocer más acerca de las operaciones usando notación científica, puedes ingresar al siguiente enlace:

https://goo.gl/wpg4Xq

Las cifras antes de la multiplicación por 10 son las cifras significativas. Esto se da porque, a veces, para ganar espacio, un número se trunca en un determinado momento. También sucede que, al utilizar menos cifras significativas, perdemos la precisión del problema, pero este se simplifica.

Las cifras significativas cumplen también un propósito en la aproximación mediante computadoras a un resultado cuyo valor es irracional o a un valor que no puede ser enteramente determinado usando los métodos conocidos. Estos valores se llaman *valores estocásticos*. Utilizando un cierto número de cifras significativas, podemos saber el valor aproximado de π y, más importante, el valor absoluto y relativo aproximado del error en dicha aproximación.

Estocástico
Sistema cuyo valor real no puede ser enteramente determinado debido a su naturaleza no determinista.

En síntesis:

Potencias de base 10 → Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.

Cifras significativas → Las cifras significativas están formadas por un número entero distinto de cero y el resto de cifras, si las hay, como parte decimal.

Potencias de base 10: Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.

Cifras significativas: Las cifras significativas están formadas por un número entero distinto de cero y el resto de cifras, si las hay, como parte decimal.

Un número expresado en notación científica consta de una parte que son las cifras significativas y una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

Un número expresado en notación científica consta de un número decimal cuya parte entera tiene una sola cifra no nula, multiplicado por una potencia de 10 de exponente entero.

Así, los números a continuación están expresados en notación científica.

$$8.50 \cdot 10^{40} ; 7{,}25 \cdot 10^{-89} ; 3{,}627\,3 \cdot 10^{23}$$

Observemos que un número en notación científica tiene tantas cifras significativas como cifras tiene el número decimal que lo forma.

Al limitar el número de cifras decimales, se pierde precisión pero se gana en simplicidad tanto para expresar el número como para realizar cálculos con él.

Desde la Química

En química y en las ciencias experimentales se manejan con frecuencia números muy pequeños y otros muy grandes. Por ello, resulta conveniente expresarlos en notación científica.

Por ejemplo, la velocidad de la luz es 300000000 m/s, en notación científica esto es:

3 x 108 m/s. La masa de la Tierra 5980000000000000000000000 kg, en notación científica es 5,98 x 1024 kg.

https://goo.gl/dF6KuX

Veamos a continuación la forma de efectuar operaciones utilizando la notación científica.

Ejemplo 19

Expresemos los siguientes números en notación científica y escribámoslo de forma aproximada con dos cifras significativas.

a. $0{,}000\ 000\ 026\ 795$ b. $639\ 246\ 000\ 000\ 000$

a. Para escribir este número como un número decimal cuya parte entera conste solo de una cifra, debemos multiplicarlo por la unidad seguida de 8 ceros. Por tanto, para obtener el número inicial, deberemos multiplicar por

$$0{,}000\ 000\ 026\ 79 = 2{,}679\ 5 \cdot 10^{-8}$$

Aproximado por redondeo a dos cifras significativas:

$$0{,}000\ 000\ 026\ 795 = 2{,}7 \cdot 10^{-8}$$

b. Procedemos del mismo modo que en el apartado anterior:

$$639\ 246\ 000\ 000\ 000 = 6{,}392\ 46 \cdot 10^{14}$$

Aproximado por redondeo a dos cifras significativas:

$$639\ 246\ 000\ 000\ 000 = 6{,}4 \cdot 10^{14}$$

Ejemplo 20

Para introducir números expresados en notación científica, las calculadoras científicas disponen de la tecla EXP.
Observa cómo introducir los siguientes números:

$3{,}75 \cdot 10^{12}$

$8{,}27 \cdot 10^{-8}$

Para realizar operaciones se prosigue del mismo modo que si fueran números cualquiera. La calculadora da el resultado en notación científica.

Ejemplo 21

En un análisis de sangre de un paciente, el número de glóbulos rojos por mm3 de sangre ha sido de 4,8 10^6

- Calcula el número de glóbulos rojos de este paciente si su cuerpo contiene aproximadamente 5 L de sangre.

$$5\cancel{L}\ \frac{10^3\ \cancel{mm}^3}{1\cancel{L}}\ \frac{4{,}8\ 10^6\,\text{glob.roj.}}{\cancel{mm}^3} = 24\ 10^9\,\text{glob.roj.} = 2{,}4\ 10^{10}\,\text{glob.roj.}$$

Ejemplo 22

Efectuemos estas operaciones.

a. $6{,}12 \cdot 10^{8} + 3{,}12 \cdot 10^{9}$ b. $3{,}75 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6}$

a. Para realizar sumas o restas, primero transformamos uno de los números de forma que ambos queden multiplicados por potencias de 10 del mismo orden, y, a continuación, aplicamos la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} 6{,}12 \cdot 10^{8} + 3{,}12 \cdot 10^{9} &= 6{,}12 \cdot 10^{8} + 31{,}2 \cdot 10^{8} \\ &= (6{,}12 + 31{,}2) \cdot 10^{8} \\ &= 37{,}32 \cdot 10^{8} = 3{,}732 \cdot 10^{9} \end{aligned}$$

b. Para multiplicar o dividir números expresados en notación científica multiplicamos o dividimos, por separado, los números decimales y las potencias de 10:

$$3{,}75 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} = (3{,}75 \cdot 2{,}2) \cdot 10^{11+(-6)} = 8{,}25 \cdot 10^{5} = 8{,}25 \cdot 10^{5}$$

Trabajo individual

1. Escriba estos números en notación científica.
   - a. 149 597 871
   - b. 3 024,53
   - c. 0,000 000 000 003 246
   - d. 34 mil dos cientos millones
2. Ordene de menor a mayor estos números.

$7{,}863 \cdot 10^{-3}$; $1{,}632 \cdot 10^{2}$; $6{,}394\ 10^{-4}$; $0{,}0032 \cdot 2{,}36 \cdot 10^{2}$

3. Realice estas operaciones y exprese el resultado en notación científica con tres cifras significativas.
   - a. $6{,}530 \cdot 10^{-3} + 56{,}39 \cdot 10^{-4}$
   - b. $6{,}530 \cdot 10^{-3} - 56{,}39 \cdot 10^{-4}$
   - c. $6{,}51 \cdot 10^{8} + 6{,}39 \cdot 10^{7} - 4{,}81 \cdot 10^{9}$
   - d. $3{,}1 \cdot 10^{6} \cdot 7{,}9 \cdot 10^{12}$
   - e. $2{,}51 \cdot 10^{4} : 3{,}07 \cdot 10$
   - f. $(5{,}05 \cdot 10^{5})^{2}$
4. Transforma las siguientes potencias para que tengan exponente positivo.
   - a. $(3\pi)^{-2}$
   - -c. $\left(\frac{4x}{9}\right)^{-3}$
   - b. $(\pi - 1)^{-5}$
   - d. $\left(\frac{4x}{x+3}\right)^{-1}$
5. Expresa en forma de una sola potencia:

$$\left(\frac{-3}{4}\right)^{5} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^{3}$$

6. Aproxima por redondeo y por truncamiento a las milésimas los siguientes números y, luego, halla el error absoluto y relativo cometido, pon los errores en notación científica.

a. 45,782 673

b. 0,128 654 1

c. 8,965 4

d. 125,386 29

UNIDAD 3

CONTENIDO:

- Productos Notables
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita con números reales
- Triángulos- Construcción de triángulos
- Congruencia de triángulos

9

noveno año

1.4. Productos Notables

D.C.D.: M.4.1.33 Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas.

Recordemos que, al trabajar con expresiones algebraicas, es frecuente encontrarnos con estos productos de binomios, denominados *productos notables*

Binomio al cuadrado

$(a + b)^2$ —> El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término más el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo 2

$(x + 3)^2$
$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$
$= x^2 + 6x + 9$

Diferencia de cuadrados

$(a - b)^2$ —> El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 3

$(2x - 3)^2$
$= (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$
$= 4x^2 - 12x + 9$

Suma por diferencia

$(a + b) \cdot (a - b)$ —> El producto de una suma por una diferencia de los mismos términos es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 4

$(2x + 5) \cdot (2x - 5)$
$= (2x)^2 - 5^2$
$= 4x^2 - 25$

A una expresión algebraica que contenga dos términos la denominamos binomio.

$3a + b^2$ $\quad$ $4a^2 - 12ab$ $\quad$ $(a + b)^2$

Un binomio es una expresión algebraica que consta de una suma o una resta de dos términos.

Como se explicó en *Mientras tanto en el mundo* a los productos notables también los podemos deducir a partir del triángulo de Pascal. El triángulo de Pascal es una construcción matemática ideada por el antiguo matemático francés Blaise Pascal. Para construirlo, empezamos con un número «1» en su cumbre. En el siguiente nivel, se colocan dos «1» de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

En la tercera columna en adelante, colocamos un «1» al principio, luego la suma de los términos a la derecha e izquierda en la fila superior y cerramos con otro «1».

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & + & 1 & & & \\
 & & 1 & + & 2 & + & 1 & & \\
 & 1 & + & 3 & + & 3 & + & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Y así sucesivamente.

Este triángulo nos indica los coeficientes de cada término del producto notable:

$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

Los coeficientes coinciden con los números del triángulo de Pascal que corresponden al nivel del binomio.

Binomio al cubo

$(a + b)^3$ —> El cubo de una suma es igual al cubo del primer término, más el triple del primero al cuadrado por el segundo, más el triple del segundo al cuadrado por el primero, más el segundo término al cubo.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ejemplo 5

$(x + 3)^3$
$= x^3 + 3 (x^2) (3(+ 3 (x) (3)^2 + 3^3$
$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$(a - b)^3$ —> El cubo de una diferencia es igual al cubo del primer término menos el triple del primero al cuadrado por el segundo, más el triple del segundo al cuadrado por el primero, menos el segundo término al cubo.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo 6

$(x + 3)^3$
$= x^3 + 3 (x^2) (3(+ 3 (x) (3)^2 + 3^3$
$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

Trinomio al cuadrado

$(a + b + c)^2$ —> El trinomio al cuadrado es igual a al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el cuadrado del tercero, más el doble producto del primero por el segundo, más el doble producto del primero por el tercero, y más el doble producto del segundo por el tercero.

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c$$

Ejemplo 7

$(x^2 - x + 1)^2$
$= (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-x) + 2 x^2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1$
$= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x$
$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Trabajo individual

1. Resuelva cada suma por diferencia.
   a. $(x - 2)(x + 2) =$
   b. $(a + 3)(a - 3) =$
   c. $(2x - 5)(2x + 5) =$
   d. $(3x + 10y)(3x - 10y) =$
   e. $(5x^2 - 3)(5x^2 + 3) =$
3. Resuelva los cuadrados de una suma y diferencia.
   a. $(p + 5q)^2 =$
   b. $(a - 2b)^2 =$
   c. $(x + 5)^2 =$
   d. $(5x + 3y)^2 =$
   e. $(a - 3b)^2$
4. Determine si las igualdades son verdaderas o falsas.
   a. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
   b. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
   c. $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$
   d. $(p - q)^2 = p^2 - q^2$

Suma de cubos

$a^3 + b^3$ —> La suma de cubos es igual a la multiplicación de la suma del primer y segundo término por el cuadrado del primero, menos el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo 8

$8x^3 + 27$

$= (2x + 3)\,(4x^2 - 6x + 9)$

Diferencia de cubos

$a^3 - b^3$ —> La diferencia de cubos es igual a la multiplicación de la diferencia del primer y segundo término por el cuadrado del primero, más el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo 9

$8x^3 - 27$

$= (2x - 3)\,(4x^2 + 6x + 9)$

Producto de dos binomios que tienen un término común

$(x + a)\,(x + b)$ —> El producto de dos binomios que tienen un término en común es igual al cuadrado del término común, más la suma de los términos no comunes por el término común, más la multiplicación de los términos no comunes.

$$(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$$

Ejemplo 10

$(x + 2)\,(x + 3)$

$= x^2 + (2 + 3)\cdot x + 2\cdot 3$

$= x^2 + 5x + 6$

Encontremos el área del cuadrado cuyo lado mide m + 3:

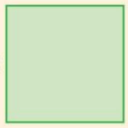
$A = Lado^2$

$= (m + 3)^2$

$= m^2 + 2\,(3m) + 3^2$

$= m^2 + 6m + 9$

$m + 3$



Trabajo individual

1. En cada producto notable encuentre el error o los errores, enciérrelo y escriba el resultado correcto.

a. $(x - 7)\,(x + 7) = x^2 + 49$

b. $(x - 8)^2 = x^2 + 16x - 64$

c. $(x + 6)^2 = x^2 + 6x + 36$

d. $(4x + 2)\,(4x - 2) = 4x^2 - 4$

e. $(a - 9)^2 = a^2 - 18a + 18$

f. $(5x + 2)\,(5x - 2) = 25x^2 + 4$

g. $(2x + 12)^2 = 4x^2 + 24x + 144$

h. $(2x + 3y)(2x - 3y) = 4x^2 + 6y^2$

i. $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 8x + 16$

Ejemplo 11

Resolvamos $(1 + 4x)^2$.

$(1 + 4x)^2$

$= 1^2 + 2\,(1)\,(4x) + (4x)^2$

$= 1 + 8x + 16x^2$

Ejemplo 12

Resolvamos $(7x - 10)^2$.

$(7x - 10)^2$

$= (7x^2) + 2\,(7x)\,(-10) + (-10)^2$

$= 49x^2 - 140x + 100$

Ejemplo 13

Resolvamos $(4a + 5b^2)(4a - 5b^2)$.

$(4a + 5b^2)(4a - 5b^2)$

$= (4a)\,(4a) + (4a)\,(-5b^2) + (5b^2)\,(4a) + (5b^2)\,(-5b^2)$

$= 16^{1+1} - 20ab^2 + 20ab^2 - 25b^{2+2}$

$= 16a^2 - 25b^4$

Ejemplo 14

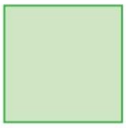
Encontremos el área del cuadrado cuyo lado mide $\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}b^3$:

$A = lado^2 = \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}b^3\right)^2$

$= \left(\frac{1}{3}a^2\right)^2 + 2\,\frac{1}{3}a^2\left(-\frac{2}{3}b^3 + -\frac{2}{3}b^3\right)^2$

$= \frac{1}{9}a^{2\,2} - \frac{4}{9}a^2b^3 + \frac{4}{9}b^{3\,2}$

$= \frac{1}{9}a^4 - \frac{4}{9}a^2b^3 + \frac{4}{9}b^6$



$\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}b^3$

Trabajo individual

1. Resuelve.
   a. $(1 + 4x)^2$
   b. $(7x - 10)^2$
   c. $(4a + 5b^2)\,(4a - 5b^2)$
2. Complete los términos faltantes para obtener igualdades en estos ejercicios:
   a. $(5 + x)^2 =$ __________ $+ 10x +$ __________
   b. $(m - 3)^2 = m^2 -$ __________ $+ 9$
   c. $($ __________ $- 5x^3)^2 = 9a^4 -$ __________ $+ 25x^6$
   d. $(4x +$ __________ $)^2 = 16a^2 +$ __________ $+ 25b^4$
   e. $(7ax^4 + 9y^5)^2 =$ __________ $+$ __________ $+$ __________
   f. $(6 - 2h)^2 =$ __________ $-24h +$ __________

2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita con números reales

D.C.D. M.4.1.38. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en *R* para resolver problemas sencillos.

Una ecuación de primer grado es una ecuación polinómica cuyo grado es 1, es decir, aquella en la que el grado mayor de los monomios es 1 (es decir, la parte literal es x).

Puesto que la ecuación es de grado 1, tenemos, a lo sumo, 1 raíz (solución). Decimos 'a lo sumo' ya que la ecuación puede no tener solución.

Observa cómo traducimos al lenguaje algebraico esta frase:

«El doble de un número menos 14 es igual a este mismo número más raíz de 2».

Escogemos la letra que representará la incógnita.	Representa el número que buscamos.
Traducimos al lenguaje algebraico la primera parte del enunciado.	El doble del número menos 14: $2x - 14$
Traducimos al lenguaje algebraico la segunda parte del enunciado.	El número más raiz de 2: $x + \sqrt{2}$
Escribimos la ecuación correspondiente al enunciado completo.	$2x - 14 = x + \sqrt{2}$

Si sumamos $-x - \sqrt{2}$ a los dos miembros de la ecuación obtenida y reducimos los términos semejantes, resulta:

$$2x \;\; 14 \; x \; \sqrt{2} + = \cancel{x} + \sqrt{\cancel{2}} \; \cancel{x} \; \sqrt{\cancel{2}} \;\; x \; 14 \; \sqrt{2} = 0$$

En esta ecuación, equivalente a la primera, solo aparece una incógnita, *x*, con exponente 1. Es una ecuación de primer grado con una incógnita.

Una ecuación es de primer grado con una incógnita si una vez efectuadas las operaciones y reducidos sus términos semejantes, el término de mayor grado es de grado 1.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita pueden expresarse:

$ax + b = 0$ donde *a* y *b* son números reales, con $a \;\; 0$.

4. Triángulos

M.4.2.8. Clasificar y construir triángulos utilizando regla y compás bajo condiciones de ciertas medidas de lados y/o ángulos, en relación con problemas prácticos de la construcción, medición de terrenos, etc.

Un triángulo es un polígono de tres lados.

Clasificación

A los triángulos los podemos clasificar según sus lados o según sus ángulos.

- Señal de tránsito que advierte que el pavimento es deslizante

Triángulos

Según sus lados

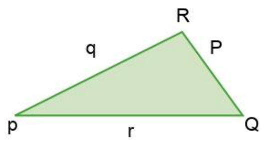
- Equilátero: tres lados iguales
- **Isósceles**: dos lados iguales y uno desigual
- **Escaleno**: tres lados desiguales

Según sus ángulos

- **Acutángulo**: tres ángulos agudos
- **Rectángulo**: un ángulo recto
- **Obtusángulo**: un ángulo obtuso

Propiedades

- Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180˚.



$p < q + r$	$p > r - q$
$q < p + r$	$q > r - p$
$r < p + q$	$r > q - p$

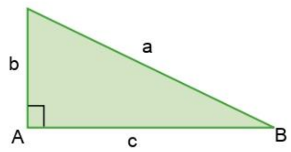
Triángulos rectángulos

Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90°. Sus lados reciben nombres especiales:

- El lado a, opuesto al ángulo recto, se denomina *hipotenusa*.
- Los lados b y c que forman el ángulo recto se llaman *catetos*.

Además, en todo triángulo rectángulo se cumple que:

- La hipotenusa es mayor que cada uno de los catetos.
- Los ángulos agudos son complementarios, ya que:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \\ \hat{A} = 90°\end{array}\right\} \hat{B} + \hat{C} = 90°$$

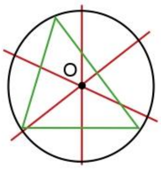
Rectas y puntos notables

Las mediatrices y las bisectrices de un triángulo, junto con las medianas y las alturas, que definiremos a continuación, constituyen las denominadas rectas notables de un triángulo, y sus intersecciones se denominan puntos notables.

Mediatrices

Las mediatrices de un triángulo son las mediatrices de sus lados.

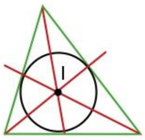
El punto donde se cortan las tres mediatrices de un triángulo es el circuncentro, O. Está situado a la misma distancia de cada vértice, por lo que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



Bisectrices

Las bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos.

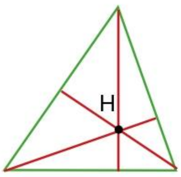
El punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo es el incentro, I. Está situado a la misma distancia de cada lado del triángulo, por lo que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Alturas

Las alturas de un triángulo son los segmentos perpendiculares a un lado (o su prolongación) y que pasan por el vértice opuesto.

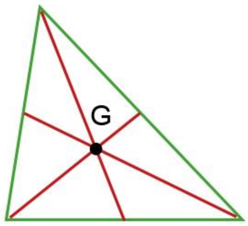
El punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo (o sus prolongaciones) es el ortocentro, H.



Medianas

Las medianas de un triángulo son los segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.

El punto donde se cortan las tres medianas de un triángulo es el baricentro, G. El baricentro divide cada mediana en dos segmentos, uno con longitud doble a la del otro.



Circuncentro y ortocentro de triángulos:

En un triángulo rectángulo, el circuncentro está situado en el punto medio de la hipotenusa. El ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.

En un triángulo obtusángulo, el *circuncentro* y el *ortocentro* son exteriores.

Trabajo individual

1. Dibuje un triángulo escaleno y acutángulo como el de la figura, y halle su circuncentro, su baricentro y su ortocentro.
   — Compruebe que estos tres puntos se encuentran sobre una línea recta, llamada *recta de Euler*, y que el baricentro se sitúa a doble distancia del ortocentro que del circuncentro.
2. ¿Es posible que un triángulo tenga dos ángulos rectos? Razona tu respuesta.
3. ¿Puede ser equilátero un triángulo rectángulo? ¿E isósceles? ¿Por qué?
4. Dos medianas de un triángulo se cortan y se dividen en dos partes cada una, si las medianas median doce y quince metros, cuáles son los valores de sus partes divididas.

4.1. Construcción de triángulos

D.C.D. M.4.2.8. Clasificar y construir triángulos utilizando regla y compás bajo condiciones de ciertas medidas de lados y/o ángulos, en relación con problemas prácticos de la construcción, medición de terrenos, etc.

Construcción de triángulos

Para determinar un triángulo, es necesario conocer tres de sus elementos, de los cuales al menos uno debe ser un lado.

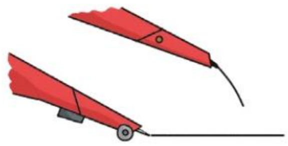
A continuación, mostramos algunos casos.

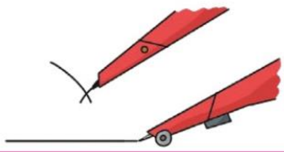
1

La construcción más sencilla es aquella donde conocemos los tres lados del triángulo (LLL).

Primero trazamos un segmento de largo de uno de los lados.

Posteriormente, abrimos el compás a la distancia del segundo lado y hacemos centro en uno de los extremos del segmento. Trazamos un arco.

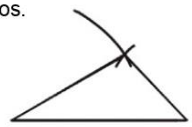




2

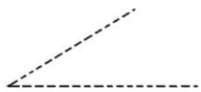
Realizamos el mismo procedimiento para el otro lado con la medida del lado restante.

Finalmente, trazamos rectas desde los extremos hasta el punto de corte de ambos arcos.



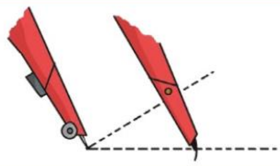
Esta construcción es la de un triángulo conociendo dos lados y un ángulo comprendido entre ambos (LAL).

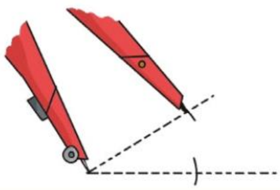
1



Primero trazamos dos líneas separadas por el ángulo dado.

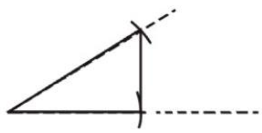
Posteriormente, tomamos el largo del primer lado y trazamos un arco con el compás hacia la primera línea.





2

Luego, hacemos lo mismo con el segundo largo sobre la segunda línea.



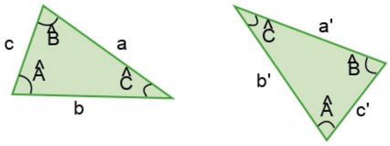
Finalmente, unimos los puntos de corte.

4.2. Congruencia de triángulos

D.C.D. M.4.2.9. Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo con criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos.

Congruencia

Dos triángulos son congruentes si tienen iguales los lados y los ángulos correspondientes.



$a = a'$; $b = b'$; $c = c'$

$\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$

Sin embargo, no es necesario comparar siempre los tres lados y los tres ángulos; para saber si dos triángulos son congruentes, basta con que lo sean algunos de sus elementos.

Para saber si dos triángulos son congruentes basta comprobar que se cumple cualquiera de estas cuatro condiciones:

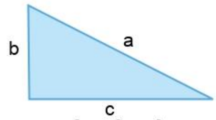
1. Tienen iguales los tres lados.
2. Tienen iguales un lado y sus dos ángulos adyacentes.
3. Tienen iguales dos lados y el ángulo que forman.
4. Tienen iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Estas condiciones son los denominados *criterios de igualdad* de triángulos.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, conocidas las longitudes de dos de sus lados, podemos calcular la otra mediante el teorema de Pitágoras.

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$a^2 = b^2 + c^2$

Conocidas las longitudes de un cateto y de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, podemos conocer la longitud del otro cateto despejándolo de la expresión del teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son iguales si:

- Tienen dos lados iguales.
- Tienen iguales un lado y un ángulo agudo.

Desde Estudios Sociales

Al observar las construcciones antiguas como las pirámides de Egipto podemos darnos cuenta que usaban cuerdas y nudas para establecer las líneas guías de construcción.

Además en las escrituras védicas de la antigua India en el que se mencionan algunas reglas para colocar sus altares en los cuales empleaban cuerdas marcadas por tríadas que muestran una aplicación del Teorema de Pitágoras que fue escrito más tarde

Actualmente muchos albañiles usan tableros pequeños aplicando este teorema para alinear las esquinas de su construcción.

Mundo Digital

El Teorema de Pitágoras tiene varias aplicaciones, puede buscarlo en difrenentes sitios web o visitar el siguiente enlace:

https://goo.gl/9JGGqP

UNIDAD 4

CONTENIDO:

- Potenciación de números reales no negativos con exponentes racionales
- Metodologías usadas en estadística
- Variables estadísticas
- Ordinal, intervalo, razón.

9
noveno año

1.7. Potenciación de números reales no negativos con exponentes racionales

D.C.D: M.4.1.37. Identificar las raíces como potencias con exponentes racionales para calcular potencias de números reales no negativos con exponentes racionales en *R*.

A una potencia de exponente racional o fraccionario la podemos transformar en una raíz cuyo índice es el denominador y el radicando es la base elevada al numerador.

Entonces, un exponente de $\frac{1}{2}$ se traduce a una raíz cuadrada; un exponente de $\frac{1}{5}$ se traduce en una raíz quinta o $\sqrt[5]{\ }$; y $\frac{1}{8}$ se traduce en una raíz octava $\sqrt[8]{\ }$.

Por lo tanto, al resolver una potencia con exponente racional, quedaría: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo 23

Expresemos estas potencias en forma radical.

a. $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

b. $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{6}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{4}{5}\right)^6}$

c. $3^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

d. $(2x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2x}$

Ejemplo 24

Expresemos $2x^{\frac{1}{3}}$ en forma radical.

1. Escribamos la expresión con el exponente fraccionario como un radical. El denominador de la fracción determina el índice la raíz, en este caso, la raíz cúbica $2\sqrt[3]{x}$.
2. El exponente solo se refiere a la parte de la expresión inmediatamente a la izquierda del exponente, en este caso x, pero no el 2.

Ejemplo 25

Simplifiquemos $(36x^4)^{\frac{1}{2}}$.

1. Reescribimos la expresión con el exponente fraccionario como un radical $\sqrt{36x^4}$.
2. Encontramos la raíz cuadrada de ambos coeficientes y de la variable.

$$\sqrt{6^2 \cdot x^4} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{x^4} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{(x^2)^2} = 6 \cdot x^2$$

Mundo Digital

Busca en Internet las raíces de números negativos e intenta justificar por qué no existe, en números reales, la raíz cuadrada de ellos.

Puedes ingresar a este enlace web:

https://goo.gl/IpG3Hw

Aplicación para la vida

La industria financiera usa exponentes racionales para computar intereses, depreciaciones y otros cálculos comunes.

Las expresiones radicales son comunes en geometría y trigonometría, particularmente en triángulos. El radio de los lados de un triángulo rectángulo de 30° - 60° - 90° es 1:2:√3, y el de lados de un triángulo rectángulo de 45° - 45° - 90° es 1:1:√2. Los triángulos son comunes para industria de la construcción, en especial en carpintería y albañilería.

Expresión de exponentes racionales usando radicales

También podemos expresar radicales usando exponentes racionales. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 26

Expresemos $9\sqrt{yz}$ con exponentes racionales.

1. Reescribimos el radical usando un exponente racional. El índice de la raíz determina la fracción. En este caso, el índice del radical es 2, por lo que el exponente será $\frac{1}{2}$.
2. Como el 9 está afuera del radical, no lo incluimos en el símbolo de agrupación, es decir, dentro del paréntesis, y el exponente no se refiere a él.

Por tanto $9 \cdot \sqrt{yz} = 9(yz)^{\frac{1}{2}}$

o también $9 \cdot \sqrt{yz} = (81\, yz)^{\frac{1}{2}}$.

Exponentes racionales con numeradores distintos de uno

Todos los numeradores para los exponentes racionales en los ejemplos anteriores han sido 1. Puede usar exponentes fraccionarios que tengan numeradores distintos de 1 para expresar raíces, como mostramos a continuación.

a. $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$

c. $\sqrt[4]{9^3} = 9^{\frac{3}{4}}$

b. $\sqrt[3]{9^2} = 9^{\frac{2}{3}}$

d. $\sqrt[n]{a^x} = 9^{\frac{x}{n}}$

Cualquier radical en la forma $\sqrt[n]{a^x}$ puede escribirse usando un exponente fraccionario en la forma $a^{\frac{x}{n}}$.

Ejemplo 27

Escribimos $\sqrt[5]{81}$ como una expresión con un exponente racional.

Descomponemos 81 en sus factores primos $81 = 3^4$.

Queda: $\sqrt[5]{3^4}$ $3^{\frac{4}{5}}$.

Trabajo individual

1. Expresa como radicales estas potencias.

   a. $36^{\frac{1}{2}}$

   b. $(-32)^{\frac{1}{3}}$

   c. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

   d. $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{9}}$

2. Simplifica

   a. $(49x^8y^3)^{\frac{1}{2}}$

   b. $\dfrac{10b^2}{8b^{4\frac{1}{3}}}$

   c. $6 \cdot m(np^5)^{\frac{1}{3}} \cdot o^{\frac{4}{3}}$

3. Expresa como potencia los siguientes radicales:

   a. $\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

   b. $\sqrt[4]{-\frac{5}{3}}$

   c. $\sqrt[7]{\left(\frac{6}{5}\right)^3}$

1.4. Metodologías usadas en estadística.

D.C.D. (M.4.3.4). Definir y aplicar la metodología para realizar un estudio estadístico: estadística descriptiva para una interpretación básica de la información presentada en los cuadros estadísticos.

Resolución de problemas

Existe un proceso a seguir para resolver problemas estadísticos:

- Describir claramente el problema.
- Identificar factores que pueden afectar el problema o solucionarlo.
- Proponer un modelo para el problema.
- Realizar experimentos.
- Refinar el modelo basándose en los datos encontrados.
- Realizar un nuevo experimento para hallar una solución al problema.
- Sacar conclusiones.

Descripción del problema

La cafetería de una escuela se está quedando con mucha fruta sin vender y desean saber el motivo por el que los estudiantes no la están consumiendo.

Factores

Un grupo de estudiantes decide analizar el problema e identificar como factores importantes: el precio de cada fruta, la poca variedad por semana y el hecho de que los estudiantes no saben que su cafetería ofrece frutas.

Modelo

Los estudiantes creen que los tres factores afectan por igual a la venta de las frutas y que se debería, entonces, bajar los precios, mejorar la variedad y publicitar la fruta en su escuela.

Experimento

Para averiguar si están en lo correcto, los estudiantes realizan una encuesta afuera de la cafetería.

Desde la Estadística

La estadística es la rama de la matemática que se encarga de extraer significado a partir de datos. Al significado extraído lo utilizamos para mejorar ventas, averiguar tendencias de mercado, perfeccionar un producto o hallar relaciones entre variables.

edb©

Resultados del experimento

En esta encuesta encuentran que al 5 % de los estudiantes les parece que la fruta es muy cara, mientras que al 95 % les parece bien su precio. El 80 % opina que hay muy poca variedad en la cafetería y, finalmente, todos los estudiantes sabían que se vende fruta en la cafetería.

Experimento

Decidieron cambiar la oferta de frutas cada día de la semana siguiente y midieron la cantidad de fruta sobrante.

Conclusión

Concluyeron que, debido a que la cantidad de fruta que sobró fue significativamente menor, el problema era la poca variedad.

De la misma manera en que el grupo de estudiantes pudo, mediante un análisis estadístico simple, alterar las ventas y solucionar un problema de mercado; nosotros podemos hacer lo mismo una vez que aprendemos las herramientas necesarias.

Escalas de medición

La elaboración de un estudio estadístico consta de varias fases:

Fase	Tareas
Concepción	• Definición del objeto de estudio: ¿qué se desea conocer y qué variables estadísticas se eligen? • Determinación de la población y valoración de la necesidad de tomar una muestra • Previsión del costo económico • Diseño de la presentación de resultados
Elaboración del cuestionario	• Selección de los datos o las preguntas sobre las variables objeto del estudio • Redacción de las preguntas de forma adecuada
Trabajo de campo	• Selección y formación de las personas que llevarán a cabo el estudio • Confección del plan de acción: distribución de espacios y tiempo de ejecución • Ejecución de la recogida de datos o de la encuesta
Análisis de los datos y presentación de los resultados	• Tratamiento de los datos obtenidos. Confección de tablas y gráficos • Revisión y verificación de su validez • Elaboración de informe

La etapa final de un estudio estadístico es el análisis de los datos recogidos, con el fin de extraer conclusiones que puedan ser de interés.

Para realizar un correcto análisis de los datos, es fundamental conocer de antemano el tipo de medida de la variable, ya que, para cada una de ellas, utilizamos diferentes estadísticas. La clasificación más convencional de las escalas de medida las divide en cuatro grupos.

Cálculos estadísticos con calculadora y computadora

Las calculadoras científicas suelen estar preparadas para efectuar algunos cálculos estadísticos. En general, no proporcionan el valor de todos los parámetros estadísticos que hemos estudiado en esta unidad, pero sí el de los dos de uso más frecuentes: la media aritmética y la desviación típica.

A continuación, explicamos el funcionamiento de una calculadora estándar, aunque conviene que revise el manual de instrucciones de la suya, porque no todas funcionan de la misma forma.

Trabajo colaborativo

1. Trabajen en parejas, busquen en periódicos o revistas, gráficos estadísti- cos como diagramas de barras, diagramas poligonales o diagramas de sectores circulares.

   Construyan una tabla de frecuencias con los datos que se representan en el gráfico.

Introducción de datos	Introducción de datos
• Ponemos la calculadora en modo estadístico pulsando la tecla y seleccionando el modo estadístico (SD). • Borramos de la memoria cálculos anteriores. • Introducimos los datos, uno a continuación de otro.  Si conocemos la frecuencia absoluta de cada xi, podemos proceder más rápidamente pulsando 	• Para la media aritmética o la desviación típica, presionamos y escogemos la opción correspondiente de la pantalla:  • También es posible obtener otros datos como el número de datos introducidos, la suma de todos los datos o la suma de los cuadrados de todos los datos pulsando y escogiendo la opción correspondiente: 

Una hoja de cálculo ofrece funciones para el cálculo de determinados parámetros estadísticos de forma directa, sin necesidad de crear fórmulas.

Para determinar otros parámetros o en el caso de intervalos de datos, la hoja de cálculo también es útil, pero se debe recurrir a la utilización de las oportunas fórmulas matemáticas.

Veamos, con un ejemplo, cómo utilizar una hoja de cálculo.

Ejemplo 8

Hallemos la media aritmética y la desviación típica de los datos de la siguiente tabla, correspondiente al número de llamadas telefónicas que cada abonado de una localidad recibe diariamente, usando la calculadora.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	82	125	323	624	682	448	270	92	47	7

- Ponemos la calculadora en modo SD, borramos de la memoria los cálculos anteriores e introducimos los datos.

- Para obtener la media aritmética, operamos de la siguiente forma:

- Para obtener la desviación típica, pulsamos las teclas siguientes:

En cuanto a las computadoras, existen muchos programas informáticos capaces de calcular los diferentes parámetros estadísticos que conocemos. Cada uno funciona de una manera específica, por lo que es conveniente consultar el manual de instrucciones correspondiente.

Ejemplo 9

Las edades, en años, de los participantes de un congreso fueron las siguientes:

35, 21, 44, 56, 37, 23, 58, 62, 33, 52, 23, 29, 45, 38, 54, 19, 37, 48, 26, 35, 43, 58, 60, 41, 22, 20, 58, 55, 47, 26, 27, 30, 37, 34, 25, 26, 49, 50, 35, 41, 45, 33, 31, 34, 19, 23, 39, 24, 28, 42, 61, 32.

Determinemos la media, la moda y la mediana:

a. Sin agrupar los datos en intervalos y utilizando las funciones que ofrece la hoja de cálculo.

b. Agrupando los datos en intervalos y empleando las fórmulas adecuadas de la hoja de cálculo.

c. Introducimos la serie de datos, sin agrupar ni ordenar previamente, en las celdas de la columna A.

   Escribimos en la celda *B1*: =PROMEDIO(A1:A52), y obtenemos el valor de la media, 37,9.

   Escribimos en la celda *B2*: =MODA(A1:A52), y obtenemos la moda, 35.

   Escribimos en la celda *C3*: =MEDIANA(A1:A52), y obtenemos la mediana, 36.

d. Confeccionamos la tabla de distribución de frecuencias.

	A	B
1	35	37,9
2	21	35
3	44	36
4	56	
5	37	
6	23	
7	58	
8	62	
9	33	
10	52	
11	23	
12	29	
13	45	
14	38	
15	54	
16	19	
17	37	
18	48	
19	26	
20	35	
21	43	
22	58	
23	60	
24	41	
25	22	
26	20	
27	58	
28	55	
29	47	
30	26	
31	27	
32	30	
33	37	
34	34	
35	25	
36	26	
37	49	
38	50	
39	35	
40	41	
41	45	
42	33	
43	31	
44	34	
45	19	
46	23	
47	39	
48	24	
49	28	
50	42	
51	61	
52	32	

Intervalo de clase	x_i	n_i	N_i
$[16, 24)$	20	8	8
$[24, 32)$	28	10	18
$[32, 40)$	36	13	31
$[40, 48)$	44	8	39
$[48, 56)$	52	6	45
$[56, 64)$	60	7	52

	A	B	C	D
1	20	8	160	
2	28	10	280	
3	36	13	468	
4	44	8	352	
5	52	6	312	
6	60	7	420	
7		52	1992	38,3

Para calcular la media debemos aplicar la fórmula:

Para ello, debemos preparar la hoja de cálculo convenientemente:

– Introducimos las series de datos de *xi* y *ni* en las columnas A y B.

– En *C1* introducimos la fórmula correspondiente al producto de los valores de las columnas A y B: =A1*B1. A esta fórmula la arrastramos de *C1* a *C6*.

– Escribimos en *B7* la fórmula de la suma de x_i: =B1:B7 y en C7 la suma de n_i: = C1:C7.

- Escribimos en la celda *D7* la fórmula: =C7/B7, obtenemos el valor de la media: 38,3.
- El intervalo con mayor frecuencia absoluta es [32, 40) y su marca de clase es la moda: 36.
- Los datos centrales pertenecen al intervalo [32, 40). Por tanto, la marca de clase del intervalo es su mediana, 36.

Fíjate que el valor de la media obtenido en ambos apartados difiere ligeramente. Esto es así porque, al trabajar con intervalos, calculamos la media de un intervalo a partir de un único valor, su marca de clase, que no deja de ser una aproximación de la media real del intervalo.

1.5. Variables estadísticas

D.C.D. M.4.3.5. Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas en relación con cada dato a utilizar.

Es interesante conocer qué clase de valor puede tomar una variable estadística. En los casos anteriores, los valores pueden ser estos:

A (color preferido): rojo, azul, verde, amarillo...

B (número de goles marcados en la última jornada): 0, 1, 2, 3...

C (estatura): 1,57 m, 1,63 m, 1,594 m, 1,625 m...

Es fácil darse cuenta de que los valores que pueden tomar las variables estadísticas pueden ser, fundamentalmente, de dos tipos: numéricos (B y C), o no numéricos (A). Por ello, las variables estadísticas se clasifican en cualitativas y cuantitativas.

Las variables estadísticas cualitativas son aquellas que no toman valores numéricos.

En el caso A, la variable estadística es cualitativa, porque los valores no son números.

Las variables estadísticas cuantitativas son las características de la población que se expresan de forma numérica.

Variable estadística cuantitativa es continua.	Una variable estadística cuantitativa es continua si, dados dos valores cualesquiera de la variable, siempre podemos obtener un valor que se encuentre entre estos dos (caso C).
Variable estadística cuantitativa es discreta.	Una variable estadística cuantitativa es discreta si no puede tomar valores intermedios entre dos consecutivos (caso B).

Las variables estadísticas que podemos estudiar a fondo son las cuantitativas, porque es posible efectuar operaciones con sus valores.

En resumen:

Encuesta

Conjunto de preguntas dirigidas a una muestra significativa con la finalidad de obtener datos para un estudio.

Variable estadística cuantitativa

Características de la población que se expresa en forma numérica.

Variable estadística cualitativa

Características de la población que no se expresan con valores numéricos.

Variable estadística cuantitativa continua

Dados dos valores cualesquiera de la variable, siempre podemos hallar un valor que se encuentre entre estos dos.

Variable estadística cuantitativa discreta

Dados dos valores cualesquiera de la variable, no podemos hallar un valor que se encuentre entre estos dos.

Trabajo individual

1. Razona de qué tipo son las variables de los estudios estadísticos de la actividad anterior.
2. Indica en cada uno de estos casos si la variable estadística es cuantitativa discreta o continua. Justifica la respuesta.
   a. Una variable estadística que solo puede tomar los valores 1; 1,25; 1,5; 1,75 y 2.
   b. Una variable estadística que puede tomar todos los valores entre 1 y 4.

Variables estadísticas

- Cualitativa
- Cuantitativa
  - Discreta
  - Continua

Muestras

Imaginemos que deseamos saber cuál es el color favorito de la gente del mundo. Lo obvio sería preguntarle a cada una de las personas del planeta cuál es su color favorito y ver cuál gana en mayoría, pero imagínate realizar una encuesta a cada una de las más de siete mil millones de personas en el planeta. Si utilizamos una hoja de papel bond por persona para realizar la encuesta, únicamente los formularios pesarían alrededor de 127 millones de kg, el equivalente al peso del agua de casi 51 piscinas olímpicas.

Escuchamos a diario, en las noticias, que se realizó una u otra encuesta sobre algún tema y se muestran algunos datos estadísticos a partir de eso. Pero ¿crees que el noticiero entrevista a cada persona en el país para obtener dichas estadísticas?

El obtener datos de toda una población es muy complicado logísticamente. Por esto, un censo total de población se realiza cada varios años, en vez de cada año.

Pero ¿cómo obtener datos significativos si es que no podemos preguntar a todos?

En estadística, resolvemos este problema con algo llamado *muestras estadísticas*.

Una muestra estadística es tomar una parte significativa de la población.

Para ilustrar esto, imaginémonos que, en el curso de un colegio, se quiere decidir qué hacer por su paseo de fin de año. Para esto se debe presentar las opciones ante el rector del colegio para que él elija una. ¿Tiene sentido que cada estudiante de una promoción de cien estudiantes hable personalmente con el rector, y le explique su idea para el paseo? En realidad, es fácil pensar que existe una mejor solución, que ahorre tiempo a todos. Un representante de cada curso irá a hablar con el director, y así se reducirá la cantidad de personas a cuatro en vez de cien.

Estos cuatro pueden verse como una muestra de los estudiantes en general.

Obtención de muestras

La forma ideal de obtener los datos para un estudio estadístico sería averiguar el valor que toma la variable estadística en todos y cada uno de los individuos de la población.

Mundo Digital

Puedes conocer más acerca de muestras estadísticas con el uso del internet.

Puedes acceder a la página

https://goo.gl/h9RSvQ

Sin embargo, esto no siempre es posible. Por ejemplo, resulta bastante sencillo preguntar el color favorito a cada uno de los estudiantes de una clase, mientras que es muy complicado y costoso medir la estatura de todos los estudiantes de una gran ciudad.

Cuando no resulta posible o adecuado obtener los datos de toda la población, recogemos los correspondientes a una muestra representativa de esta; es decir, una muestra que nos pueda dar una idea correcta de los valores de la variable en toda la población.


http://goo.gl/J4o7Qp

También es importante el número de elementos de la muestra: cuanto más grande sea, mejor representará toda la población, pero más difícil será obtener los datos (necesitaremos más tiempo, seguramente más dinero).

Ejemplo 10

En los estudios estadísticos siguientes, expliquemos cómo efectuaríamos la recogida de datos y si conviene tomar una muestra o no. En caso afirmativo, digamos cómo la seleccionaríamos.

a. Si un lote de latas de pescado en conserva está en condiciones de salir a la venta o no.

b. Si un determinado modelo de auto gusta a la mayoría de ecuatorianos o no.

Respuesta del literal a.

Para saber si una lata en conserva está en buenas condiciones para abrirse. Por tanto, habría que seleccionar una muestra de este lote de latas, abrirlas y comprobar si se encuentran en buen estado. La muestra se podría obtener numerando las latas y efectuando un sorteo.

Respuesta del literal b.

Se debería realizar una encuesta. No se podría aplicar a toda la población porque es demasiado numerosa. La forma más correcta sería tomar una muestra a partir del censo. Otro modo, si no se dispone del censo, podría ser una encuesta en la calle.

Espacio muestral

El espacio muestral representa todas las formas posibles de elegir una muestra de entre una población. En el ejemplo anterior, el espacio muestral son todos los grupos de cuatro personas, conformados por una persona de cada paralelo.

Datos

Los datos son una colección de hechos que se documentan de manera numérica, con palabras, mediciones, observaciones y hasta descripciones.

Existen dos tipos de datos: datos cualitativos y datos cuantitativos.

Los datos cualitativos describen alguna información. Algunos ejemplos son estos.

Si una receta resulta dulce, amarga o ácida. Si los gatitos nacidos de una gata blanca son blancos, grises o negros. Si el idioma más popular es español, inglés o francés.

Por otro lado, los datos cuantitativos son datos numéricos. Estos se separan a su vez en dos categorías, datos cuantitativos discretos y datos cuantitativos continuos.

Los datos cuantitativos discretos son aquellos que solo pueden tener valores enteros.

Los datos cuantitativos discretos son aquellos que solo pueden tener valores enteros.

- ¿Cuántos limones produce un limonero al año?
- ¿Cuántos estudiantes hay en una clase?
- ¿Cuántas visitas tiene un video?

Los datos cuantitativos continuos se refieren a medidas que no son necesariamente enteras:

- ¿Cuánto pesan los gatitos de una camada?
- ¿Cuál es la altura promedio en un grupo de estudiantes?
- ¿Qué velocidad tiene un auto de carreras?

http://goo.gl/wq5coi

El término de Especio Muestral también es empleado en los experimentos o calculos de probabilidades, en donde, el espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de los posibles resultados que pueden darse y representamos por la letra Ω.

Trabajo individual

1. Responde esta pregunta, analiza lo aprendido.
   — ¿Cuáles de los siguientes datos son cualitativos y cuáles cuantitativos?
   Color de ojos, temperatura de la habitación, viscosidad de la mermelada, fuerza de una persona.
2. Nombra cinco situaciones que se puedan resolver mediante una encuesta.
3. Investiga la estatura promedio de tu paralelo o curso, ¿tu estatura está por encima o por debajo del promedio?

1.6. Ordinal, intervalo y razón

D.C.D. M.4.3.6. Definir y aplicar niveles de medición: nominal, ordinal, intervalo y razón.

A las variables de las escalas nominal y ordinal las denominamos también *categóricas*; por otra parte, a las variables de escala de intervalo o de razón las denominamos *variables numéricas*.

Con los valores de las variables categóricas no se puede, o no tiene sentido, efectuar operaciones aritméticas. Con las variables numéricas, sí.

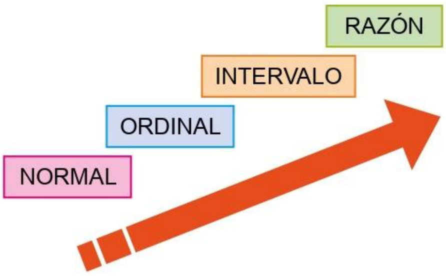
La escala nominal solo permite asignar un nombre al elemento medido, como: nacionalidad, número de camiseta en un equipo de fútbol, número de cédula.

La escala ordinal, además de las propiedades de la escala nominal, permite establecer un orden entre los elementos medidos. Los datos en escala ordinal pueden ser contados y ordenados, pero no pueden ser medidos, por ejemplo: preferencia a productos de consumo, etapa de desarrollo de un ser vivo, clasificación de películas por una comisión especializada.

A pesar de que algunos valores son formalmente numéricos, solo están siendo usados para identificar a los individuos medidos.

La escala de intervalo, además de todas las propiedades de la escala ordinal, hace que tenga sentido calcular diferencias entre las mediciones, por ejemplo: temperatura de una persona, ubicación en una carretera respecto de un punto de referencia, sobrepeso respecto de un patrón de comparación, nivel de aceite en el motor de un automóvil medido con una vara graduada.

Finalmente, la escala de razón permite, además de lo de las otras escalas, comparar mediciones mediante un cociente; por ejemplo, con variables como altura de personas, cantidad de litros de agua consumido por una persona en un día, velocidad de un auto en la carretera, número de goles marcados por un jugador de fútbol en un partido.



Medidas de posición

Cuartiles, deciles, percentiles

La descripción de un conjunto de datos incluye, como un elemento de importancia, la ubicación de estos dentro de un contexto de valores posibles.

Cuando separamos un conjunto de datos usando deciles, entre dos deciles consecutivos encontramos el 10% de los datos.

Mundo Digital

Puedes conocer más y resolver ejercicios didácticos acerca de cuartiles, deciles y percentiles ingresando al siguiente enlace

https://goo.gl/Upp6XJ

Trabajo individual

1. Al lado de cada oración relaciona el tipo de escala

   a. Rango de estudio

   b. Peso de una persona

   c. Número de Cédula de Identidad

   d. Nivel socio económico

   d. Uso de audífonos

   e. Cantidad de litros de agua consumido por una famila al día

   f. Nacionalidad.

   g. Númeo de camiseta en un equipo de Voley