Rafael Galeth
COLEGIO VIRTUAL INTENSIVO PCEI

PLAN DE RECUPERACIÓN

ÁREA: MATEMÁTICAS
Unidad: 1
Nivel Educativo: 3RO E.G.B.S.

Autor: Ing. Rocío Rezabala

Indicaciones Generales:

Estimado estudiante, para desarrollar las actividades que se detallan a continuación usted deberá realizar una lectura previa, y, seguir las indicaciones de en cada actividad.

Semana 1

Tema: Función exponencial

- **Contenido**

La función exponencial es una de las funciones más importantes en matemáticas. Para formar una función exponencial, hacemos que la variable independiente sea el exponente. Estas funciones son usadas en muchas situaciones de la vida real. Principalmente, son usadas para el crecimiento poblacional, interés compuesto o radioactividad.

- **Lectura del libro**

Definición de funciones exponenciales

Una función exponencial es una función matemática que tiene la forma general $f(x)= b^x$, en donde x es una variable y b es una constante llamada la base de la función y debe ser mayor que 0. En las funciones exponenciales, la variable de entrada, x, ocurre como un exponente.

Las siguientes son las propiedades de la función exponencial estándar $f(x)= b^x$

Características de las funciones exponenciales

Las funciones exponenciales tienen las siguientes propiedades:

- El dominio de una función exponencial son todos los números reales, o dicho con otras palabras, una función exponencial existe por cualquier valor de *x*.

$$\text{Dom } f = R$$

- Sin embargo, la función solo toma valores positivos, por lo tanto, el recorrido o rango de una función exponencial son todos los números reales positivos.

$$\text{Im } f = (0, +\infty)$$

- Toda función exponencial es una función continua e inyectiva a la vez.

- Si la función no está trasladada, cualquier función exponencial pasa por el punto (0,1). Porque la función evaluada en el cero siempre da como resultado uno.

$$f(0) = a^0 = 1$$

- Asimismo, el valor de una función exponencial en x=1 es igual a la base.

$$f(1) = a^1 = a$$

- Si la base de la potencia (a) es mayor que 1 la función exponencial es creciente. Por contra, si el coeficiente a está dentro del intervalo entre 0 y 1 la función exponencial es decreciente.
- En general, el eje X es una asíntota horizontal de una función exponencial.
- La inversa de la función exponencial es la función logarítmica. Por tanto, las gráficas de una función exponencial y una función logarítmica son simétricas respecto de la recta y=x si ambas poseen la misma base.

¿Cómo representar en una gráfica una función exponencial?

Las funciones exponenciales son muy sencillas de representar. Así que vamos a ver cómo graficar una función exponencial en un gráfico mediante un ejemplo.

- Representa en una gráfica la siguiente función exponencial:

$$f(x) = 2^x$$

En las funciones exponenciales no hace falta calcular el dominio, porque siempre serán todos los números reales:

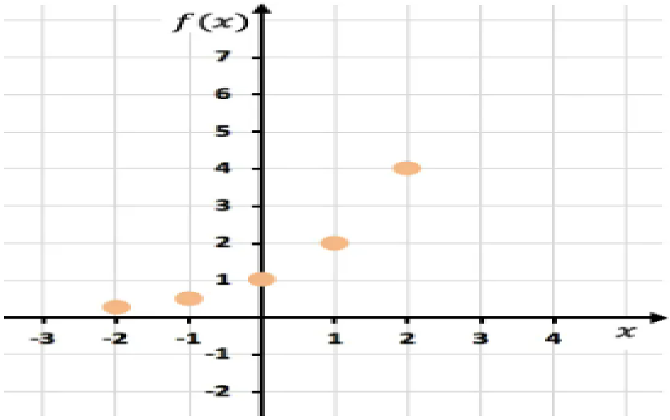
$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Por tanto, simplemente tenemos que hacer la tabla de valores. Como este tipo de funciones cambian mucho de un punto a otro, calcularemos 5 puntos. Pero cuantos más puntos calculemos, más precisa será la representación de la función.

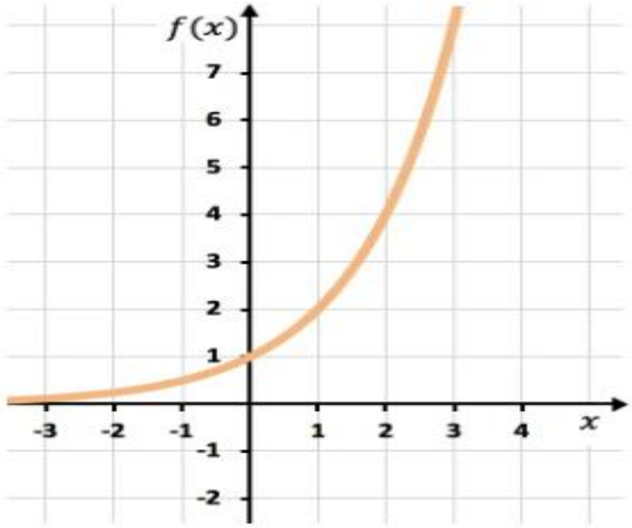
- $x = 0 \longrightarrow f(0) = 2^0 = 1$
- $x = 1 \longrightarrow f(1) = 2^1 = 2$
- $x = 2 \longrightarrow f(2) = 2^2 = 4$
- $x = -1 \longrightarrow f(-1) = 2^{-1} = 0,5$
- $x = -2 \longrightarrow f(-2) = 2^{-2} = 0,25$

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	4
-1	$0,5$
-2	$0,25$

Ahora representamos los puntos en un gráfico:



Y finalmente unimos los puntos y alargamos la función:



Fíjate que la función por la derecha sigue creciendo hasta el infinito.

En cambio, la función por la izquierda va decreciendo, pero nunca llega a 0. Aunque se acerca mucho, nunca lo llega a tocar. Eso quiere decir que la recta y=0 (el eje de las abscisas) es una asíntota horizontal.

Actividades

1. ¿Qué es una función exponencial?

2. Mencione las características de las funciones exponenciales

3. Cómo se representa una función exponencial

4. Realice un resumen en máximo 4 líneas acerca de lo que entiende por funciones exponenciales.

5. Represente gráficamente la siguiente función exponencial.

$$f(x) = 2^x + 1$$

Semana 2

Tema: Ecuaciones exponenciales

- **Contenido**

Una ecuación exponencial es aquella en la que aparecen exponenciales, es decir, potencias cuyos exponentes son expresiones en las que aparece la incógnita, *x*.

- **Lectura del libro.**

Una ecuación exponencial es una ecuación en cual una variable ocurre en el exponente. Por ejemplo, y = 5x es una ecuación exponencial debido a que el exponente es la variable x (también se dice "5 a la potencia de x"), mientras que y = x5 no es una ecuación exponencial debido a que el exponente es 5 y no una variable. A menudo escribimos ecuaciones exponenciales como y = abx, en donde a y b son constantes (números que no cambian de valor) y x y y son variables. Adicionalmente, a es llamado el valor inicial y b es llamado el valor base. En la mayoría de las áreas de la matemática y la ciencia, x es considerada la variable independiente o manipulable y es la variable dependiente o de respuesta, debido a que el valor que obtenemos de y depende de lo que sustituimos por x.

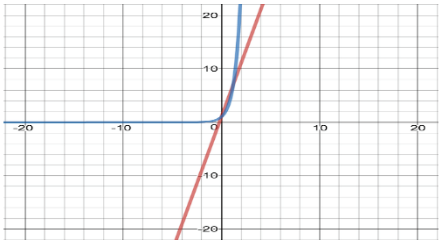
En ecuaciones exponenciales, el valor de *b*, el valor base, tiene algunas restricciones. La constante *b* no puede ser igual a 1 y debe ser mayor de 0. ¿Por qué? Si *b = 1*, entonces sin importar el valor de *x*, el valor de *y* es siempre el mismo número *a*; si *b = 0* entonces el valor de *y* es siempre 0. Cuando graficamos la ecuación con estos valores, obtendremos una línea horizontal (por ende, una ecuación lineal) en vez de una curva exponencial. Si *b < 0* algunos valores de *x* resultasen en valores de *y* que no son verdaderos. Por ejemplo, si *x* es una fracción como ½ y *b* = -2, entonces $(-2)^{½} = \sqrt{-2}$, el cual no es un número real y no puede ser graficado en un eje de números reales.

Graficando una ecuación exponencial

Miremos el comportamiento de una ecuación exponencial, y = 5x y compárelo a una ecuación lineal, y = 5x + 1. Para ver las diferencias, graficaremos ambas ecuaciones primero completando una tabla de valores, mostrada a continuación.

Ecuaciones lineales				**Ecuaciones exponenciales**		
x	*y=5x+1*	*y*	*Cambio en valor y*	$y=5^x$	*y*	*Cambio en valor y*
-1	5(-1)+1	-4		5^{-1}	1/5	
0	5(0)+1	1	+5 (â€œplus 5â€)	5^0	1	x5 (â€œpor 5â€)
1	5(1)+1	6	+5	5^1	5	x5
2	5(2)+1	11	+5	5^2	25	x5
3	5(3)+1	16	+5	5^3	625	x5

Los valores de “y” de una ecuación lineal son el resultado de simplemente agregar el mismo valor una y otra vez (en este caso, 2), llamado progresión aritmética. Al contrario de valores “y” de una ecuación exponencial que son el resultado de multiplicación repetida por la misma cantidad (igual, 2), llamado una progresión geométrica. Podemos comparar estos dos conjuntos de resultados gráficamente, mostrado en la gráfica a continuación.



La gráfica de una ecuación lineal es una línea recta e incrementa a un ritmo constante. Por otra parte, la gráfica de la ecuación exponencial no es una línea recta y aumenta a un ritmo incremental formando una curva. Debido a que la potencia en una expresión exponencial indica el número de veces de que el número base se multiplica por si mismo, tal como $2^3 = 2 * 2 * 2$, después mientras las potencias aumentan, multiplicamos por el mismo valor más y más veces.

- **Actividades**

1. ¿Qué es una ecuación exponencial?

2. ¿Cuál es la diferencia entre una ecuación exponencial y una ecuación lineal?

3. Indique las diferencias entre ecuación y función exponencial.

4. Realice un resumen acerca de las ecuaciones exponenciales

Semana 3

Tema: Límites de Funciones

➢ Contenido

El concepto de límite es muy importante para precisar otros conceptos tales como la continuidad y la derivación y resulta fundamental para poder avanzar en el dominio y manejo de los principios fundamentales del cálculo diferencial.

➢ Lectura del libro

¿Qué es el límite de una función?

En matemáticas, el límite de una función en un punto es el valor al cual se aproxima la función cuando x se acerca a ese punto.

El límite de la función f(x) en el punto x=a se representa utilizando la siguiente notación:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

La expresión anterior significa que el límite de la función f(x) cuando x tiende a es igual a b.

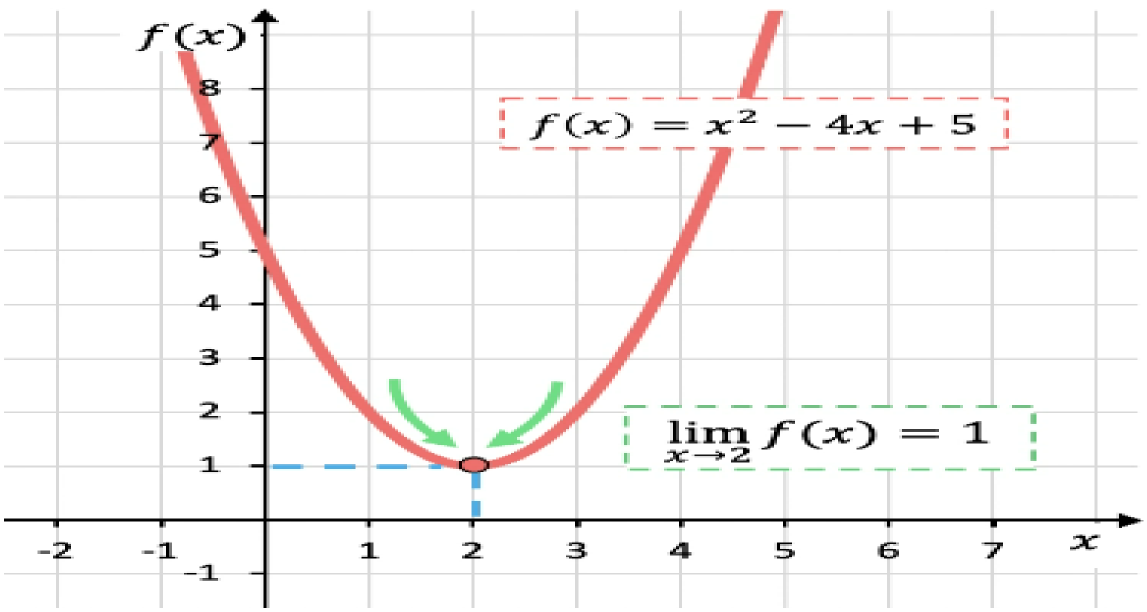
Para acabar de entender qué significa el límite de una función, vamos a hallar el siguiente límite:

Para ver a qué valor se aproxima la función cuando x tiende a 2, podemos ir calculando imágenes de la función de puntos cada vez más cerca de x=2:

x	$f(x) = x^2 - 4x + 5$
0	5
1	2
1,5	1,25
1,9	1,01
1,99	1,0001
1,999	1,000001
⋮	⋮
↓	↓
2	1

x	$f(x) = x^2 - 4x + 5$
4	5
3	2
2,5	1,25
2,1	1,01
2,01	1,0001
2,001	1,000001
⋮	⋮
↓	↓
2	1

Como puedes ver en las dos tablas anteriores, a medida que vamos tomando valores más próximos a x=2, la función se va acercando a 1. Por lo tanto, el límite de la función cuando x tiende a 2 es 1.



Observa la gráfica que la función se acerca al mismo valor independientemente de si nos acercamos por la izquierda o por la derecha. Más abajo profundizaremos más sobre este concepto de los límites.

Para calcular el límite de una función en un punto simplemente tenemos que sustituir el valor de ese punto en la función.

Por ejemplo, si queremos resolver el límite cuando x tiende a 3 de la siguiente función, debemos sustituir las x de la función por 3:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 + 5x - 7) =$$

$$= 3^2 + 5 \cdot 3 - 7 =$$

$$= 9 + 15 - 7 = 17$$

- **Actividades**

1. Realice los siguientes ejercicios acerca de los límites de funciones.

- $\lim_{x \to 1} (4x - 1) =$

- $\lim_{x \to -2} (x^2 - 3x + 1) =$

- $\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x - 2} =$

- $\lim_{x \to 0} e^x =$

- $\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x - 1} =$

Semana 4

Tema: Propiedades de los límites

➢ Contenido

Además de ayudarnos a visualizar la gráfica de la función, los límites también se utilizan para estudiar otras propiedades, como la continuidad de una función y la diferenciabilidad.

➢ Lectura del libro

Concepto de Límite y Propiedades.

Las propiedades de los límites son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja, al tratarse de operaciones, también se le denomina álgebra de los límites.

El límite de una función en un punto es único, por lo tanto, una función no puede tener dos límites diferentes en un mismo punto.

Refiérase límite como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Límite

Siempre que "x" se aproxime a "a", sin llegar a alcanzar nunca este valor, f(x) se aproxima a "A".

Propiedades de los Límites

Si dos funciones f(x) y g(x) toman valores iguales en un entorno reducido de un punto de acumulación x=a y una de ellas tiene límite l en ese punto, la otra también tiene límite l en a.

Si una función tiene límite en un punto, ese límite es único. Una función no puede tener dos límites distintos en un punto.

Si una función tiene en un punto un límite distinto de cero, en un entorno reducido del punto, la función determina valores del mismo signo que su límite.
Toda función que tiene límite finito en un punto, está acotada en un entorno reducido del mismo.

Las propiedades de los límites son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja. Al tratarse de operaciones, también se le denomina álgebra de los límites.
Sean f(x) y g(x) dos funciones definidas en un mismo intervalo en donde está el valor a del límite y k una constante.
Unicidad del límite: cuando el límite existe, el límite es único.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

- **Propiedad de la suma:** el límite de la suma es la suma de los límites.

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

- **Propiedad de la resta:** el límite de la resta es la resta de los límites.

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

- **Propiedad del producto:** el límite del producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

- **Propiedad de la función constante:** el límite de una función constante es esta misma constante.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

- **Propiedad del factor constante:** en un límite de una constante multiplicada por una función se puede sacar la constante del límite sin que se afecte el resultado.

$$\lim_{x\to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

- **Propiedad del cociente:** el límite de un cociente de dos funciones es el cociente de los límites de las mismas.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \; ;$$

$$\text{siempre que } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

- **Propiedad de la función potencial:** el límite de una función potencial es la potencia del límite del base elevado al exponente:

$$\lim_{x\to a}[f(x)^k] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k$$

- **Propiedad de la función exponencial:** el límite de una función exponencial es la potencia de la base elevada al límite de la función exponente:

$$\lim_{x\to a}\left[k^{g(x)}\right] = k^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- **Propiedad de la función potencial exponencial:** el límite de una función potencial exponencial, es la potencia de los límites de las dos funciones:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

➢ Actividades:

1. ¿Qué son los límites?

2. Conteste verdadero o falso ¿Una función puede tener dos o más límites?

Verdadero
Falso

3. Realice un resumen acerca de las propiedades de los límites.

Vicerrectorado	MSc. Isabel Astudillo	
Revisado	**Nombres y Apellidos**	**Firma**