Rafael Galeth
COLEGIO VIRTUAL INTENSIVO PCEI

Matemáticas

3ro
Bachillerato

www.colegiopceirafaelgaleth.com

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministro de Gestión Educativa
Wilson Rosalino Ortega Mafla

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Roqueline Arguelles
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 2
Bachillerato segundo curso

Antonio Garrido González
Dirección general

José Luis Gómez Cutillas
Dirección editorial

María Banal Martínez
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé
© grupo edebé, 2009
Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

EDITORIAL DON BOSCO

ISBN 978-9978-71-993-0
Primera impresión: julio 2016
Este libro fue evalaudo por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el el 30 de mayo de 2016.

Ministerio de Educación

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

3ro

Ministerio de Educación

República del Ecuador

ÍNDICE DE CONTENIDOS

UNIDAD 1

CONTENIDO:

- Función Exponencial
- Ecuaciones Exponenciales
- Límites de funciones
- Propiedades de los límites

3ro Bachillerato

1.1 Funciones exponenciales

En un cultivo de bacterias *nitrobacter agilis*, un ejemplar se divide aproximadamente en dos cada día. Si queremos averiguar la población descendiente de este ejemplar al cabo de dos días, o después de un mes, tendremos que calcular las siguientes potencias.

- Al cabo de dos días: $2^2 = 4$ individuos
- Al cabo de un mes: $2^{30} = 10737 \cdot 10^9$ individuos

Por lo tanto la función se expresa: $f(x) = 2^x$

Podemos definir la función:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to f(x) = a^x, \text{ donde } a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

> A la función que asigna a la variable independiente x el valor $f(x)=a^x$ la llamamos función exponencial de base a, donde a es un número real positivo diferente de 1.

Así, por ejemplo, las funciones $f(x) = 3^x$ y $h(x) = 0{,}8^x$ son funciones exponenciales de base 3 y $0{,}8$, respectivamente.

En particular, la función exponencial de base e, $f(x) = e^x$, es especialmente importante, ya que describe múltiples situaciones reales: evolución de poblaciones, fenómenos de desintegración radiactiva...

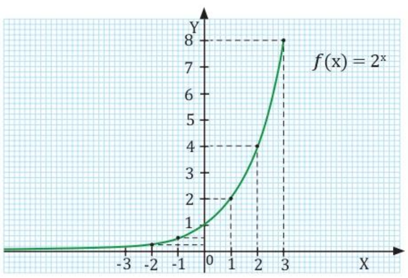
La gráfica de las funciones exponenciales varía según la base a sea mayor o menor que 1. **Observa** las gráficas.

Y TAMBIÉN: ¿?

Observa que la relación que existe entre el número de descendientes y los días transcurridos es una función dada por una potencia de base 2. Esta función la llamamos función exponencial de base 2 y la escribimos $f(x) = 2^x$.

Gráfica de la función $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Gráfica de la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

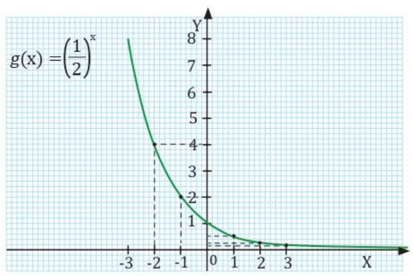


Tabla 2.

Podemos definir la función biyectiva: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$

$$x \rightarrow f(x) = b^{x}$$

Las funciones exponenciales $f(x) = a^{x}$, $a > 1$, y $g(x) = b^{x}$, $0 < b < 1$ presentan gráficas similares las de las funciones que acabamos de estudiar, $f(x) = 2^{x}$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

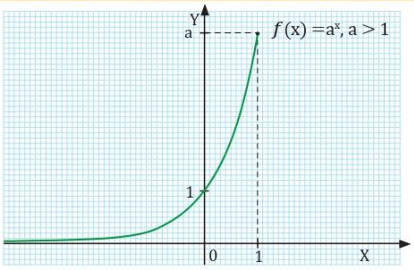
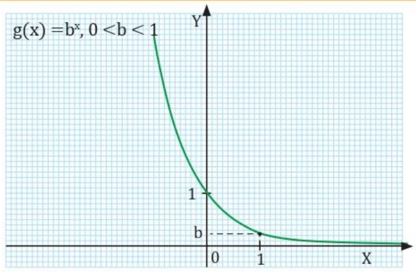
Gráfica de la función $f(x) = a^{x}$, $a > 1$	Gráfica de la función $g(x) = b^{x}$, $0 < b < 1$
	

Tabla 3.

Propiedades	
• **Dominio**: $D(f) = \mathbb{R}$ • **Recorrido**: $R(f) =]0, +\infty)$ • **Acotación**: Está acotada inferiormente por 0. • Intersecciones con los ejes: eje OY en el punto $(0, 1)$, ya que $a^{0} = 1$. • **Continuidad**: Es continua en $\mathbb{R}$. • **Tendencia**: La recta $y \rightarrow 0$ es una asíntota horizontal. Si $a > 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^{x} = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} a^{x} = +\infty$ Si $0 < a < 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^{x} = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} a^{x} = 0$	• **Periodicidad**: No es periódica. • **Simetría**: No es simétrica. • **Crecimiento y decrecimiento**: Es estrictamente creciente si $a > 1$, y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$. • **Extremos relativos**: No tiene. • **Inyectividad**: Es inyectiva, puesto que cualquier recta horizontal que tracemos sobre la gráfica la intercepta como máximo en un punto. Esto es si $f(x_1) = f(x_2)$ Entonces $x_1 = x_2$ • **Sobreyectividad**: No es sobreyectiva, pues el recorrido no es $\mathbb{R}$. Por tanto f no es biyectiva.

Tabla 4

Actividades

1. **Representa** en un mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones:

   a. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ b. $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^{x}$

   c. $h(x) = 3^{x}$

2. **Representa** en diferentes planos cartesianos.

   a. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ b. $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^{x}$

   c. $h(x) = 3^{x}$

3. **Contesta**: ¿Cuál de los dos procedimientos anteriores nos permiten analizar mejor las funciones?

1.3 Ecuaciones exponenciales

Observa la expresión $2^x = 32\,768$.

Se trata de una ecuación cuya incógnita aparece en un exponente.

> Llamamos ecuaciones exponenciales a aquellas ecuaciones cuya incógnita aparece en el exponente de una potencia.

Para resolver una ecuación exponencial, además de la definición y las propiedades de las potencias y los logaritmos, utilizaremos:

- La inyectividad de las funciones exponenciales:

  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ lo que equivale a $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

  La inyectividad permite convertir una ecuación exponencial en otra ecuación cuya resolución es más sencilla.

- Un cambio de variable: en general $a^x = t$.

  Este cambio de variable permite convertir una ecuación exponencial, cuya incógnita es x, en otra ecuación, cuya incógnita es t, y de resolución más sencilla.

Y TAMBIÉN: ¿?

Si hacemos el cambio $ax = t$ por las propiedades de las potencias, se tiene:

$a^{nx} = (a^n)^x = (a^x)^n = t^n$

$a^{x+n} = a^x \cdot a^n = a^n \cdot t$

$a^{x-n} = \dfrac{a^x}{a^n} = \dfrac{t}{a^n}$

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación $2^x = 32\,768$.

Escribiremos en forma de potencias de la misma base los dos miembros de la ecuación. Para ello descompondremos en factores primos el número $32\,768$.

Obtenemos $32\,768 = 2^{15}$, de donde resulta $2^x = 2^{15}$.

Así pues, por la inyectividad de las funciones exponenciales, tenemos que $x = 15$.

Observa que este resultado coincide con el logaritmo en base 2 de $32\,768$.

Ejemplo 2

Resuelve la ecuación $2^{3x} = 11$.

Tomamos logaritmos decimales en ambos miembros de la ecuación:

$\log 2^{3x} = \log 11$

Por las propiedades de los logaritmos:

$$3x \cdot \log 2 = \log 11$$

Y de aquí:

$$3x = \frac{\log 11}{\log 2} = 3{,}46$$

Luego $x = 1{,}15$.

Ejemplo 3

Resuelve la ecuación $3^{2x-1} - 3\,x = 18$.

Por las propiedades de las potencias, la ecuación se puede escribir:

$$\frac{3^{2x}}{3} - 3x = 18$$

Efectuaremos el cambio de variable $3^x = t$. De esta forma $3^{2x} = t^2$, por lo que resulta una ecuación cuya incógnita es t:

$$\frac{t^2}{3} - t = 18$$

Eliminando denominadores se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$t^2 - 3t - 54 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $t = 9$ y $t = -6$.

Observa que la solución $t = -6$ no es válida, ya que equivale a la expresión $3x = -6$, y $3x$ ha de ser siempre un número positivo.

Por tanto, la única solución válida es $t = 9$, o lo que es igual, $3x = 9$.

Escribiendo ambos miembros de la igualdad como potencias de la misma base, tenemos que $3x = 32$.

Luego $x = 2$.

Actividades

5. **Resuelve** las siguientes ecuaciones:

a. $2^{3x-5} = 1\,024$
b. $\sqrt{4^{-2x+6}} = \dfrac{1}{8}$
c. $32^{x^2-5x-3} = 1$
d. $25^{x-4} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x}$
e. $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 112$
f. $9^{x-1} - 2 \cdot 3^x - 27 = 0$
g. $7^x = 2$
h. $5^{x+1} = 6$
e. $3^{2x-1} = 112$
f. $6^{-x} + 6^{1-x} + 6^{2-x} + 6^{3-x} = 259$

x	$f(x)$
2,9	3,9
2,99	3,99
2,999	3,999
...	...

Tabla 6

x	$f(x)$
3,1	4,1
3,01	4,01
3,001	4,001
...	...

Tabla 7

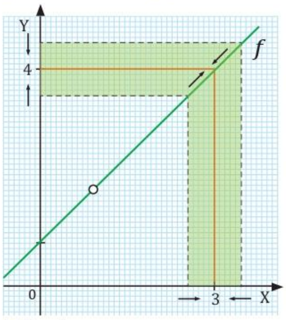


Fig. 1.

2. LÍMITES DE FUNCIONES

Un número real L es el límite de una función $f(x)$cuando x tiende a x_0 si para cualquier número real positivo ε, existe un número real δ, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x)\text{-}L| < \varepsilon$. Lo simbolizamos escribiendo:

$$\lim_{x \to x_0} f\,(x) = L$$

A menudo nos interesa conocer el comportamiento de una función cuando la variable independiente se aproxima a un cierto valor. Esta información nos la proporcionará el estudio de los límites de dicha función.

2.1 Límite finito de una función en un punto

Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}\, x \neq 1 \Rightarrow f(1)$ no existe y el punto de abscisa $x = 3$.

Si elaboramos una tabla (tabla 1 y 2), en la que damos a x valores cercanos a 3, aunque menores, y otra similar con valores cercanos a 3, pero mayores, podemos ver que en ambos casos las imágenes $f(x)$ se encuentran en un entorno de 4.

Podemos llegar a esta misma conclusión si observamos la gráfica de $f(x)$. A medida que estrechamos la franja vertical en torno a 3, la franja horizontal se estrecha también en torno a 4. Decimos entonces que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 3 es 4. Lo simbolizamos escribiendo:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4$$

A continuación, **fíjate** en que el valor de este límite coincide con: $f(3) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 4$, pero no siempre ocurre esto.

Así, si observamos de nuevo la gráfica de $f(x)$, o nos guiamos por las tablas (tablas 3 y 4), podemos ver que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

En este punto; el límite no coincide con su imagen, ya que $f(1)$ no está definida.

Observa que, en ambos casos, si consideramos un entorno cualquiera del límite L, podemos hallar siempre un entorno de x_0 tal que las imágenes de todos los puntos de este, excepto la imagen de x_0, estén contenidas en el primero.

x	$f(x)$
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
...	...

Tabla 8

x	$f(x)$
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
...	...

Tabla 9

2.2 Límites laterales finitos

Considera la función por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x < 2 \\ -x + 3 \text{ si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{y el punto } x = 2.$$

Elaboramos una tabla en la que damos a x valores en un entorno de 2, aunque menores; y otra en la que damos a x valores también en un entorno de 2, pero en este caso, mayores. Como podemos observar en la figura, al acercarse x a 2 por la izquierda, las imágenes de $f(x)$ se aproximan a 3. En cambio si nos acercamos por la derecha, las imágenes de $f(x)$ se aproximan a 1.

Decimos que el límite lateral de f cuando x tiende a 2 por la izquierda es 3; y cuando x tiende a 2 por la derecha es 1. Lo simbolizamos escribiendo, respectivamente:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

x	$f(x)$
1,9	2,9
1,99	2,99
1,999	2,999
...	...

Tabla 10

x	$f(x)$
2,1	0,9
2,01	0,99
2,001	0,999
...	...

Tabla 11

Un número real L es el límite lateral de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda (o la derecha) si para cualquier número real positivo ε, existe un número real δ, tal que para todos los puntos $x < x_0$ (o $x > x_0$), si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Lo simbolizamos escribiendo respectivamente:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

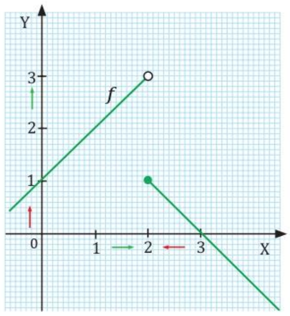


Fig. 2.

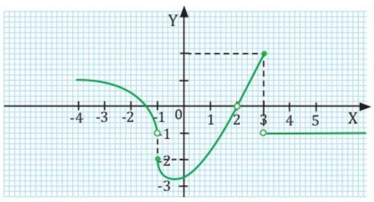
2.3 Relación entre el límite y los límites laterales

Según la definición de límite de una función f en un punto x_0, los valores a los que se aproximan las imágenes por f cuando x se acerca a x_0, tanto por la izquierda como por la derecha, serán iguales.

La condición necesaria y suficiente para que exista el límite de una función en un punto es que existan los dos límites laterales de la función en dicho punto y que ambos coincidan.

Actividades

7. En la figura se representa la función f.



a. $f(-1)$
b. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = L$
c. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = L$
d. $f(2)$
e. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = L$
f. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = L$
g. $f(3)$
h. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = L$
i. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = L$

—**Indica** si existe el límite de la función en los puntos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

3. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Las propiedades de los límites de funciones que enunciaremos a continuación permitirán el cálculo sistemático de límites. Estas propiedades están definidas para límites finitos, aunque, como veremos más adelante, pueden ser aplicadas también a límites infinitos.

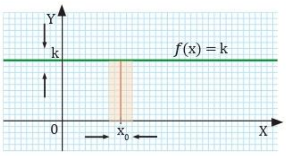


Fig. 7.

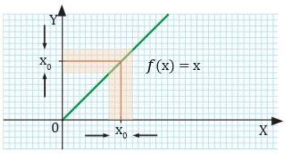


Fig. 8.

3.1 Propiedades

L1. El límite de una función en un punto, si existe, es único.

L2. El límite de la función constante en un punto es la misma constante.

$$\lim_{x\to x_0} k = k$$

L3. El límite de la función identidad en un punto es el valor de ese punto.

$$f(x) = x \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$$

L4. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existen y son finitos, se verifica:

		Ejemplo
L4.1.	$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to -1} f(x) = 2$ y $\lim g(x) = 5 \Rightarrow \lim (f(x) + g(x)) = 2 + 5 = 7$
L4.2.	$\lim_{x\to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x),\ k \in \mathbb{R}$.	$\lim_{x\to 3} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 3} 5 \cdot f(x) = 5 \cdot \lim_{x\to 3} f(x) = 5 \cdot 3 = 15$
L4.3.	$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = 13 \Rightarrow \lim (f(x) \cdot g(x)) =$ $= \lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x) = 4 \cdot 13 = 52$
L4.4.	$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$	$\left.\begin{matrix}\lim_{x\to -2} f(x) = -4 \\ \lim_{x\to -2} g(x) = -1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to -2} f(x)}{\lim_{x\to -2} f(x)} = \frac{-4}{-1} = 4$
L4.5.	$\lim_{x\to x_0} [f(x)^{g(x)}] = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, si $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$	$\left.\begin{matrix}\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \\ \lim_{x\to 1} g(x) = 6\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)^{g(x)} = (\lim f(x))^{\lim_{x\to 1} g(x)} = 2^6 = 64$
L4.6.	$\lim_{x\to x_0} g[f(x)] = g[\lim_{x\to x_0} f(x)]$, si g es continua en $\lim_{x\to x_0} f(x)$	

Tabla 19

Las propiedades L2., L3., y L4. permiten calcular de manera inmediata límites de funciones polinómicas y racionales.

Tipo de función	Ejemplo
Si $f(x) = P(x)$ es una función polinómica, para cualquier x_0: $\lim_{x\to x_0} f(x) = P(x_0)$	$\lim_{x\to 3} (-x^2 + 5x - 2) = -3^2 + 5 \cdot 3 - 2 = -9 + 15 - 2 = 4$
Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, para cualquier x_0 tal que $Q(x_0) \neq 0$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$	$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - x + 5}{x + 3} = \frac{3 \cdot 2^2 - 2 + 5}{2 + 3} = \frac{15}{5} = 3$

Tabla 20

3.2 Indeterminaciones

Son resultados de operaciones cuyo resultado no es conocido, como:

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0} \qquad \frac{0}{0}$$

La propiedad L4., que nos indica cómo operar con límites finitos, también verifica si una de las funciones o ambas tienen límite infinito, o bien, si la variable **x** tiende a más o menos infinito.

Al operar con límites tanto finitos como infinitos, pueden aparecer expresiones inicialmente idénticas y cuyo resultado es diferente según las funciones que se operen. A estas expresiones las llamamos indeterminaciones.

Consideremos las funciones $f_1(x) = x^5 - 4x^3$, $f_2(x) = 2x^2 - 8$ y $f(x) = \dfrac{x^5 - 4x^3}{2x^2 - 8}$; calculemos $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$:

Si aplicamos la propiedad L4.4. de los límites, obtenemos:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^5 - 4x^3}{2x^2 - 8} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^5 - 4x^3)}{\lim\limits_{x \to -2} (2x^2 - 8)} = \frac{0}{0}$$

De igual manera, si calculamos

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 4x^3}{2x^2 - 8} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^5 - 4x^3)}{\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 8)} = \frac{0}{0}$$

La expresión $\dfrac{0}{0}$ no es ningún número, pues no tiene sentido dividir por cero. Pero, si observamos la gráfica de f, deducimos que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$ y que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

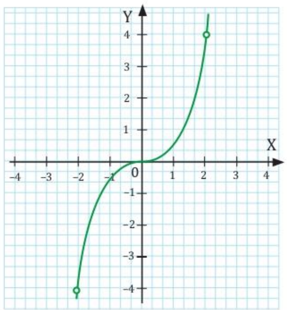


Fig. 9.

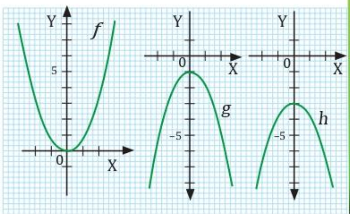
En ambos casos hemos obtenido, inicialmente, la misma expresión, $\dfrac{0}{0}$, y, sin embargo, el valor del límite es diferente. Por este motivo, decimos que $\dfrac{0}{0}$ es una «indeterminación».

También son indeterminaciones las siguientes expresiones:

Actividades

9. Sean las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 - 1$ y $h(x) = -x^2 - 3$, cuyas gráficas son las de la figura.

- **Deduce**, a partir de las gráficas, los límites siguientes: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$,
- **Calcula**, aplicando la propiedad L4.1, los límites: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x))$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + h(x))$
- **Calcula** $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x))$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + h(x))$ efectuando previamente la suma y compara el resultado con el del apartado anterior.



4. CÁLCULO DE LÍMITES

A continuación, calcularemos los límites de distintas funciones basándonos en las propiedades descritas en el apartado anterior.

4.1 Límites de funciones polinómicas

Las funciones polinómicas son de la forma $f(x) = P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x^1 + a_0 \cdot \forall a ; \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$.

- El límite de una función polinómica en un punto x_0 es el valor que toma la función en dicho punto.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = P(x_0)$$

Así $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

- El límite de una función polinómica en el infinito vale $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo del signo del término del coeficiente de mayor grado.

$$\lim_{x \to +\infty} \begin{cases} +\infty \text{ si } a_n > 0 \\ -\infty \text{ si } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\forall a : \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 6

Calculemos:

- $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 + 5x - 1)$
- $\lim_{x \to +\infty} (-3x^2 + 5x - 1)$
- $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 2x + 8)$

- $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 + 5x - 1) = +\infty$ puesto que $3 > 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} (-3x^2 + 5x - 1) = -\infty$ puesto que $-3 < 0$.
- $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 2x + 8) = \lim_{x \to +\infty} ((x)^2 + 2(-x) + 8) = \lim_{x \to +\infty} (x)^2 - 2(x) + 8) = +\infty$ puesto que $1 > 0$.

4.2 Límites de funciones racionales

En general, las funciones racionales son de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_n x^m + \cdots + b_0}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i b_i \in \mathbb{R}$

En el estudio del límite distinguiremos dos casos:

–El límite de una función racional en un punto x_0 es el valor que toma la función en dicho punto. Consideraremos tres casos:

1. Si $Q(x_0) \neq 0$ entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Ejemplo 7

Calculemos: $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} = \frac{(-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 6(-1)}{1 - (-1)} = -7$$

2. Si $Q(x_0) = 0$ y $P(x_0) = 0$, entonces estamos en un caso de indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$.
Para resolver esta indeterminación, dividimos numerador y denominador por $x - x_0$ situación que equivale a factorizar el polinomio, de manera que se puede simplificar el factor $(x - x_0)$ y calculamos el límite de la expresión simplificada.

Ejemplo 8

Calculemos: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x}$; $x \neq 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 6x)\cdot \cancel{(x-1)}}{(-1)\cdot \cancel{(x-1)}} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 6x}{-1} = \frac{1^2 - 6\cdot 1}{-1} = 5$$

Si $Q(x_0) = 0$ y $P(x) \neq 0$, el límite es más infinito, menos infinito o no existe, dependiendo del signo de los límites laterales.

Ejemplo 9

Calculemos: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{x^2 - 2x + 1}$

Calculemos los límites laterales:

- Al tomar valores de x próximos a 1, aunque menores, el numerador es negativo ($-1 < 0$) y el denominador, positivo ($x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$). Por tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$$

- Al tomar valores de x próximos a 1, aunque mayores, el numerador es negativo ($-1 < 0$) y el denominador, positivo ($x\ 2 - 2x + 1 = (x-1)2 > 0$). Por tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$$

- Como ambos límites laterales son iguales a $-\infty$, podemos concluir que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$$

- El límite de una función racional en el infinito nos llevará a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ cuyo resultado dependerá del grado de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Así, podemos distinguir tres casos:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$, $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{0, 1, ..., n\}, b_j \in \mathbb{R}\ \forall j \in \{0, 1, ..., m\}, n, m \in \mathbb{N}$.	
Si $n < m$, entonces: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	Ejemplo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^4 - 2} = 0$
Si $n = m$, entonces: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_n}$	Ejemplo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^2 - 1}{4x^2 + 1} = 2$
Si $n > m$, entonces: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \dfrac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{si } \dfrac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$	Ejemplo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 + 5x - 3}{7x^2 + 1} = +\infty$ ya que $\dfrac{2}{7} > 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 + 5x - 3}{-7x^2 + 1} = -\infty$ ya que $\dfrac{2}{-7} < 0$

Tabla 21

4.3 Límites de funciones definidas a trozos

Calcular el límite de funciones definidas a trozos puede reducirse a tres casos.

- **Primer caso:** Si a las imágenes de todos los valores de x próximos a x_0 las calculamos mediante la misma expresión analítica, procedemos como en el caso de las funciones definidas mediante una única expresión analítica.

Ejemplo 10

Calculemos: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 6x)\cdot\cancel{(x-1)}}{-1\cdot\cancel{(x-1)}} = \frac{1^2 - 6\cdot 1}{-1} = 5$$

Nota que en este caso, $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

- **Segundo caso:** Si a las imágenes de los valores de x próximos a x_0 por la izquierda las calculamos mediante una expresión analítica, y las de los valores de x próximos a x_0 por la derecha mediante otra diferente, calcularemos los dos límites laterales por separado. La existencia del límite depende de si estos dos coinciden.

Ejemplo 11

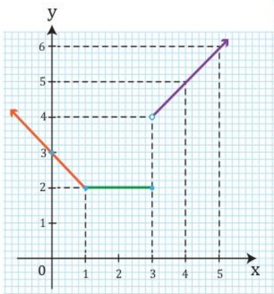
Calculemos: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- Al calcular la imagen de los valores de x próximos a 1 por la izquierda y por la derecha, utilizamos expresiones analíticas diferentes. Luego:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (3 - x) = 3 - 1 = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} 2 = 2 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

- Al calcular la imagen de los valores de x próximos a 3 por la izquierda y por la derecha, utilizamos expresiones analíticas diferentes. Luego:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} 2 = 2 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} (x + 1) = 4 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x\to 3} f(x)$$



- **Tercer caso:** Para el límite de una función a trozos en el infinito, consideramos solo el trozo de la función cuyo dominio llegue hasta el infinito y calculamos como una función cualquiera.

Actividades

10. Sea la función. $\quad f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 3x + 4 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ $\quad$ b. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ $\quad$ c. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ $\quad$ d. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

UNIDAD 2

CONTENIDO:

- Matrices numérica 1.1. Concepto
- Representación 1.3. Igualdad
- Tipos de matrices
- Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita

3ro Bachillerato

1. MATRICES NUMÉRICAS

1.1. Concepto

Observa el siguiente rectángulo de números.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Fila 1} \\ \\ \text{Fila 2}\end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}\end{array}$$

Consta de seis números dispuestos en dos filas y tres columnas. Decimos que es una matriz de dimensión 2×3.

> Llamamos matriz de dimensiones $m \times n$ a un arreglo rectangular de números reales, dispuestos en m filas y n columnas

Podemos referirnos fácilmente a un elemento determinado dando la fila y la columna en que se encuentra.

Así, por ejemplo, el número 2 es el elemento que ocupa la fila 1, columna 1; el número -3 es el que ocupa la fila 2, columna 3.

1.2. Representación

Representamos una matriz mediante una letra mayúscula (A,B,C...); y sus elementos, mediante la misma letra pero minúscula (a,b,c...), con un doble subíndice que indica la fila y la columna a las que pertenece cada uno de ellos. Así, en general, para representar una matriz A, de dimensión $m \times n$, escribimos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.3. Igualdad

Dos matrices, A y B, son iguales cuando contienen los mismos elementos, dispuestos en los mismos lugares.

$$A = B \text{ si } a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } i \text{ y } j$$

Lógicamente, para que dos matrices sean iguales, es necesario que tengan la misma dimensión.

1.4. Tipos de matrices

Algunas matrices reciben nombres especiales de acuerdo con su dimensión o sus elementos.

	Tipo de matriz	Ejemplo
Según su dimensión	**Matriz cuadrada** El número de filas coincide con el de columnas (dimensión $n \times n$). Se habla de matriz cuadrada de orden n. Los elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} forman la diagonal principal.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz cuadrada de orden 3 Los elementos 2, 2 y 6 forman la diagonal principal.
	Matriz fila Solo tiene una fila (dimensión $1 \times n$). También se le llama vector fila.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz fila 1×3
	Matriz columna Sólo tiene una columna (dimensión $m \times 1$). También se le llama vector columna.	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ Matriz columna 3×1
Según su dimensión	**Matriz triangular (superior o inferior)** Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo o situados por encima de la diagonal principal son 0.	$a_{ij} = 0, i > j$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz triangular superior $a_{ij} = 0, i < j$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz triangular inferior
	Matriz diagonal Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son 0.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
	Matriz identidad Matriz diagonal en la que todos los elementos situados en la diagonal principal son 1. Se simboliza por la letra I.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Matriz nula Todos sus elementos son 0.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tabla 1.

2. OPERACIONES CON MATRICES

Vamos a estudiar diversas operaciones que pueden efectuarse con matrices.

2.1. Adición de matrices

Dadas dos matrices, A y B, de la misma dimensión, $m \times n$, la matriz suma, $A + B$, es la que obtenemos sumando los elementos que en cada una de ellas ocupan la misma posición:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\forall\, A, B \in M \Rightarrow A + B = C$$

$$A, B \in M$$

Ejemplo 1

Calcula $A + B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Operamos de acuerdo con la definición:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 4+4 \\ 0+4 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la adición de matrices	
Asociativa	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Elemento neutro $0 = (0)$	$A + 0 = 0 + A = A$
Elemento opuesto $-A = (-a_{ij})$	$A + (-A) = (-A) + A = 0$
Conmutativa	$A + B = B + A$

Tabla 2.

La existencia de elemento opuesto nos permiten definir la matriz diferencia, $A - B$. Es la que obtenemos al sumar A y $-B$:

$$A - B = A + (-B)$$

De forma abreviada:

$$(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij}) + (-b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

De este modo, si A y B son las matrices del ejemplo anterior, tenemos:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 4-4 \\ 0-4 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. Multiplicación de una matriz por un número real

Dados una matriz A de dimensión $m \times n$, y un número real k, la matriz producto por un número real, kA, es la que obtenemos al multiplicar cada elemento de la matriz por ese número:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada:

$$k(a_{ij}) = (ka_{iij}), \forall_i \forall_j$$

Ejemplo 2

Calcula $2A$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Operamos de acuerdo con la definición:

$$2A = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot(-3) & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación de una matriz por un número real	
P1	$k\,(A + B) = kA + kB,\ \forall\ k \in \mathbb{R},\ A, B \in M$
P2	$(k + h)A = kA + hA$
P3	$k\,(hA) = (kh)A$
P4	$1A = A1 = A\ ,\ 1 \in \mathbb{R} \wedge A \in M$

Tabla 3.

Y TAMBIÉN: ¿?

El producto $A \cdot B$ de dos matrices solo está definido si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

$$m \times k \qquad k \times n$$

$$m \times n$$

La matriz producto es de dimensión $m \times n$.

2.3. Multiplicación de matrices

A continuación, estudiaremos la multiplicación de matrices. Definiremos primero esta operación en un caso particular muy simple y, después, extenderemos la definición a un caso general.

Sean una matriz fila F de dimensión $1 \times n$ y una matriz columna C de dimensión $n \times 1$:

$$F = (F_1 \cdots F_n)\ C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Llamamos producto de F por C, y lo simbolizamos $F \cdot C$, a:

$$F \cdot C = (F_1 \cdots F_n) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = f_1c_1 + \cdots + f_nc_n$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Dada una matriz A de dimensión m x n, la matriz transpuesta, A^T, es la que se obtiene intercambiando sus filas por columnas

Ejemplo 3

Consideremos las matrices $A = (2\ 3) + B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Calculemos el producto $A \cdot B$.

Operamos de acuerdo con la definición:

$A \cdot B = (2\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = -7$

Supongamos ahora una matriz A de dimensión $m \times k$, a cuyas filas llamaremos $F_1, F_2, \dots, F_m$, y una matriz B de dimensión $k \times n$, a cuyas columnas llamaremos $C_1, C_2, \dots, C_n$.

La matriz producto $A \cdot B$ es la que obtenemos de la siguiente forma:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & \cdots & F_1 \cdot C_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_m \cdot C_1 & \cdots & F_m \cdot C_n \end{pmatrix}$$

Observa que el elemento de esta matriz que ocupa la fila i-ésima y la columna j-ésima es el que obtenemos al multiplicar la fila F_i por la columna C_j.

Propiedades de la multiplicación de matrices	
Asociativa	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Distributiva por la izquierda de la multiplicación respecto a la adición	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Distributiva por la derecha de la multiplicación respecto a la adición	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
No conmutatividad	$A \cdot B \neq B \cdot A$

Tabla 4.

3. MATRIZ IDENTIDAD

En el caso de matrices cuadradas de orden n, la multiplicación cumple una propiedad adicional. Existe un elemento neutro que llamamos matriz identidad y que simbolizamos por I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, para cualquier matriz cuadrada de orden n:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Actividades

1. **Considera** las matrices siguientes.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula:

a. $A = M + N - (2M - 3N)$ b. $B = M \cdot N - (M + I) \cdot (N - I)$

5. ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal con n incógnitas, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es una expresión algebraica de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

donde:

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales conocidos llamados coeficientes.
- b es un número real conocido llamado término independiente.

Si el término independiente es cero, decimos que la ecuación es homogénea. Una solución de la ecuación anterior es una n-upla de números reales, $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, que sustituidos en las correspondientes incógnitas, hacen que se cumpla la igualdad, es decir:

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = b$$

Así, por ejemplo, la expresión algebraica:

$$2x - 3y = 10$$

es una ecuación lineal con dos incógnitas, donde:

- x e y son las incógnitas.

  2 y -3 son los coeficientes de x e y, respectivamente.
- 10 es el término independiente.

Y TAMBIÉN: ¿?

A un conjunto ordenado de n números lo llamamos n-upla.

En este caso, el par $(2, -2)$ es solución, ya que, si sustituimos x por 2 e y por -2, cumplimos la igualdad:

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) = 10$$

6. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Como sabemos, un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que deben verificarse simultáneamente. Si todas ellas son lineales, diremos que se trata de un sistema de ecuaciones lineales.

En general, representaremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas del modo siguiente:

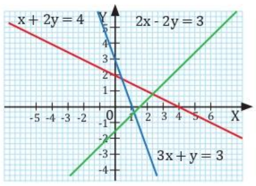
$$\begin{cases} ①\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ ②\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \\ ③\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \rightarrow b_i,\ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Una solución del sistema anterior es una n-upla de números reales, $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, que verifica simultáneamente las m ecuaciones.

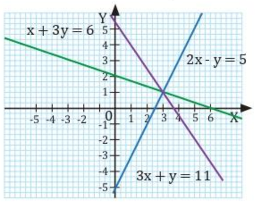
6.1 Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Según sus soluciones, distinguimos las siguientes clases de sistemas.

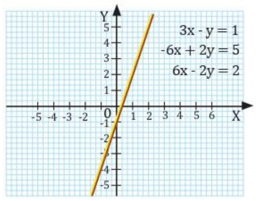
<table>
<tr><th rowspan="2">Sistema inconsistente</th><th colspan="2">Sistema consistente</th></tr>
<tr><td colspan="2">Si existe alguna n-upla solución, el sistema se denomina consistente.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Si no existe ninguna n-upla solución, el sistema se denomina inconsistente.

Así, por ejemplo, si resolvemos gráficamente el siguiente sistema:
$$\left.\begin{array}{r}2x-2y=3\\x+2y=4\\3x+y=3\end{array}\right\}$$


vemos que no tiene solución, pues las tres rectas no tienen ningún punto común.</td><th>Determinado</th><th>Indeterminado</th></tr>
<tr><td>Si existe sólo una n-upla solución, el sistema se denomina consistente determinado.

Así, por ejemplo, si resolvemos gráficamente el siguiente sistema:
$$\left.\begin{array}{r}x+3y=6\\2x-y=5\\3x+y=11\end{array}\right\}$$


vemos que tiene solución única, pues las tres rectas tienen un único punto común.</td><td>Si existe más de una n-upla solución, el sistema se denomina consistente indeterminado.

Así, por ejemplo, si resolvemos gráficamente el siguiente sistema:
$$\left.\begin{array}{r}3x-y=1\\-6x+2y=5\\6x-2y=2\end{array}\right\}$$


vemos que tiene infinitas soluciones, pues las tres rectas tienen todos los puntos comunes.</td></tr>
</table>

Tabla 7.

6.2 Notación matricial

Para simplificar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, consideramos solamente los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes. En efecto, al sistema de la página anterior podemos asociar dos matrices.

<table>
<tr><th>Matriz asociada al sistema</th><th>Matriz ampliada asociada al sistema</th></tr>
<tr><td>• La formada por los coeficientes, que denominaremos matriz asociada al sistema y denotaremos por A:
$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$</td><td>• La formada por los coeficientes y los términos independientes, que denominaremos matriz ampliada asociada al sistema y denotaremos por A':
$$A'=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$$</td></tr>
</table>

Tabla 8.

7. MÉTODO DE GAUSS

Fíjate en el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{ll}(E_1) & 2x + y - z = 3 \\ (E_2) & y - 2z = -1 \\ (E_3) & 3z = 6\end{array}\right\}$$

Cualquier ecuación que consideres tiene menos incógnitas que la ecuación inmediatamente anterior. A este tipo de sistemas lo llamamos sistemas escalonados. Estos sistemas se resuelven de manera muy sencilla mediante sustitución regresiva.

Utilizando notación matricial, siempre podremos resolver un sistema de ecuaciones lineales cualquiera si somos capaces de hallar una matriz escalonada equivalente mediante transformaciones elementales. A esto lo conocemos como el método de Gauss.

Y TAMBIÉN: ¿?

Llamamos sistemas equivalentes a los que tienen las mismas soluciones.

Ejemplo 6

Resolvamos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r}2x + y - z = 5 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x - 2y + z = -2\end{array}\right\}$$

- Hacemos que el coeficiente de la x en la primera fila sea 1, con el fin de facilitar los cálculos posteriores. Para ello, intercambiamos las dos primeras filas:

$$\left.\begin{array}{r}2x + y - z = 5 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x - 2y + z = -2\end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 \Leftrightarrow E_2} \left.\begin{array}{r}x - y + 2z = -3 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + z = -2\end{array}\right\}$$

- Sumamos ahora a la segunda fila la primera multiplicada por -2, y a la tercera, la primera multiplicada por -3:

$$\left.\begin{array}{r}x - 2y - z = -4 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + z = -2\end{array}\right\} \xrightarrow[E_3 \Rightarrow E_3 - 3E_1]{E_2 \Rightarrow E_2 - 2E_1} \left.\begin{array}{r}x - y + 2z = -3 \\ 3y - 5z = 11 \\ y - 5z = 7\end{array}\right\}$$

- Seguidamente, hacemos que en la segunda fila el coeficiente de la y sea 1, con el fin de facilitar los cálculos posteriores. En este caso, basta con intercambiar las dos últimas filas.

$$\left.\begin{array}{r}x - y + 2z = 5 \\ 3y - 5z = -3 \\ y - 5z = 7\end{array}\right\} \xrightarrow{E_2 \Leftrightarrow E_3} \left.\begin{array}{r}x - y + 2z = -3 \\ y - 5z = 7 \\ 3y - 5z = 11\end{array}\right\}$$

- Para finalizar, sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por -3:

$$\left.\begin{array}{r}-y + 2z = -3 \\ y - 5z = 7 \\ 3y - 5z = 11\end{array}\right\} \xrightarrow{E_3 \Rightarrow E_3 - 3E_2} \left.\begin{array}{r}x - y + 2z = -3 \\ y - 5z = 7 \\ 10z = -10\end{array}\right\}$$

- De este modo, hemos obtenido un sistema escalonado, cuyas soluciones podemos calcular por sustitución regresiva:

$$\left.\begin{array}{l}z = -1 \\ y = 7 + 5z = 7 + 5 \cdot (-1) = 2 \\ x = -3 + y - 2z = -3 + 2 - 2 \cdot (-1) = 1\end{array}\right\}$$

Actividades

3. **Resuelve**, utilizando el método de Gauss, los sistemas siguientes.

a. $\left.\begin{array}{r}-x - 2y - z = -4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 4x + 2y + 2z = 8\end{array}\right\}$

b. $\left.\begin{array}{r}x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3z = 3\end{array}\right\}$

8. INECUACIONES LINEALES

Si cambiamos el signo de igualdad (=) de una ecuación lineal por alguno de los signos de desigualdad (<, >, ≤ y ≥), obtenemos una expresión algebraica denominada inecuación lineal.

8.1. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita

Recordemos el concepto y la forma de resolver las inecuaciones lineales y los sistemas lineales de inecuaciones con una incógnita.

Inecuaciones lineales con una incógnita

Son aquellas en las que solamente aparece un polinomio de primer grado.

Llamamos inecuación de primer grado o lineal con una incógnita a cualquier inecuación equivalente a $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ o $ax + b \geq 0$, donde $a, b \in \mathbb{R} \neq 0$.

Para resolver este tipo de inecuaciones, procedemos como en el caso de las ecuaciones lineales, teniendo en cuenta que, al multiplicar o dividir por un número negativo, debemos cambiar el sentido de la desigualdad para obtener una inecuación equivalente.

Recordemos su representación gráfica:

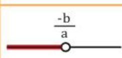
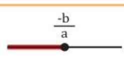
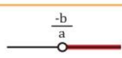
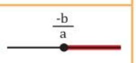
Conjunto solución	$S = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$	$; S = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right]$	$; S = \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$	$; S = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right[$
Representación gráfica	$\frac{-b}{a}$ 	$\frac{-b}{a}$ 	$\frac{-b}{a}$ 	$\frac{-b}{a}$ 

Tabla 9.

Ejemplo 7

Resolvamos la inecuación:

$$\frac{3(x-7)}{2} + x \leq \frac{5(x-1)}{2}$$

- Eliminamos paréntesis:

$$\frac{3x-21}{2} + x \leq \frac{5x-5}{2}$$

- Eliminamos denominadores:

$$\text{m.c.m. } (2, 2) = 2$$
$$3x - 21 + 2x \leq 5x - 5$$

- Trasladamos términos y reducimos los semejantes:

$$3x + 2x - 5x \leq -5 + 21$$
$$0x \leq 16$$

- Para cualquier x que consideremos, el primer miembro valdrá siempre 0, por lo que se cumplirá la desigualdad $0 \leq 0$.

Luego, todos los números reales serán solución de la inecuación. Escribiremos:

$$S = \mathbb{R} = (+\infty, -\infty)$$

Sistemas lineales de inecuaciones con una incógnita

Dado un conjunto de inecuaciones lineales con una incógnita:

$$3x - 2 < 4x + 1$$

$$4x + 3 \geq 2\,(x + 2)$$

Si imponemos que todas ellas han de verificarse simultáneamente, se tiene un sistema de inecuaciones.

Llamamos sistema lineal de inecuaciones con una incógnita a un conjunto de inecuaciones lineales con una incógnita que deben cumplirse simultáneamente.

El conjunto solución son valores de x que satisfacen a la vez todas las inecuaciones. Para resolver este tipo de sistemas, procedemos como indicamos a continuación:

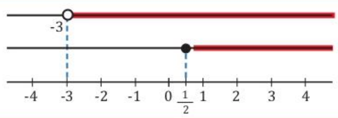
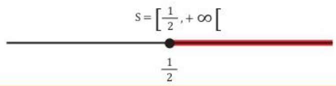
Procedimiento	Ejemplo
Resolvemos por separado cada una de las inecuaciones.	$3x - 2 < 4x + 1$ $4x + 3 \geq 2(x + 2)$ Primera inecuación: $3x - 2 < 4x + 1$; $3x - 4x < 1 + 2$; $-x < 3$; $x > -3$; $S_1 = (-3, +\infty)$ $\wedge$ Segunda inecuación: $4x + 3 \geq 2(x + 2)$; $4x + 3 \geq 2x + 4$; $4x - 2x \geq 4 - 3$; $2x \geq 1$; $x \geq \frac{1}{2}$; $S_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
Representamos sobre una misma recta las soluciones de cada inecuación.	
Determinamos las soluciones comunes a todas las inecuaciones del sistema.	Las soluciones comunes son los valores de x tales que $x \geq \frac{1}{2}$: 

Tabla 10.

8.2. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

Considera la desigualdad algebraica $x - y < 6$. Se trata de una inecuación lineal con dos incógnitas.

Llamamos *inecuación* lineal con dos incógnitas a cualquier inecuación equivalente a $ax + by < c$, $ax + by \leq c$, $ax + by > c$ o $ax + by \geq c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Construimos la tabla asignando diversos valores a x e y. Fíjate en que la inecuación $x - y < 6$ solo se verifica para determinados pares de valores de x e y. Cada par de valores de x e y que satisface la inecuación es una solución de la inecuación.

Representación gráfica de las soluciones

x	y	x - y < 6
1	9	$1 - 9 < 6$
3	4	$3 - 4 < 6$
4	- 4	$4 - (-4) < 6$
...	.....	....

Tabla 11.

Las soluciones de una inecuación lineal con dos incógnitas pueden representarse gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas asignando a cada par de valores, x e y, de una solución el punto (x, y) del plano de coordenadas.

Observa que, si sustituimos en la inecuación $x - y < 6$ el signo $<$ por el signo $=$, obtenemos la ecuación lineal $x - y = 6$, que equivale a la ecuación $y = x - 6$, cuyas soluciones se corresponden con los puntos de una recta.

De acuerdo con la figura 1, vemos que esta recta divide el plano en dos semiplanos, A y B:

- Las coordenadas (x, y) de los puntos del semiplano A cumplen:

$$y > x - 6 \rightarrow x - y < 6$$

- Las coordenadas (x, y) de los puntos de la recta cumplen:

$$y = x - 6 \rightarrow x - y = 6$$

- Las coordenadas (x, y) de los puntos del semiplano B cumplen:

$$y < x - 6 \rightarrow x - y > 6$$

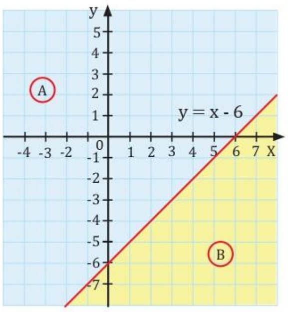


Fig. 1.

Así, las soluciones de la inecuación $x - y < 6$ son las coordenadas (x, y) de los puntos del semiplano A.

Vemos, pues, que la representación gráfica de las soluciones de una inecuación lineal con dos incógnitas es un semiplano.

Si en la inecuación aparecen los signos $\leq$ o $\geq$, las coordenadas de los puntos de la recta que determina el semiplano solución también son solución de la inecuación.

En la práctica, para determinar el semiplano solución, basta con tomar un punto situado en uno de los semiplanos y comprobar si sus coordenadas verifican la inecuación:

- Si la verifican, las coordenadas de los puntos del semiplano escogido serán soluciones de la inecuación.
- Caso contrario, las soluciones de la inecuación serán las coordenadas de los puntos del otro semiplano.

Ejemplo 8

Resolvamos gráficamente la inecuación:
$3x - y < 2$

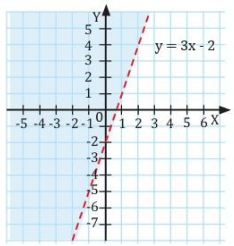
- Representamos la recta $3x - y = 2$, que equivale a $y = 3x - 2$.
- Consideramos un punto de uno de los semiplanos en que queda dividido el plano y sustituimos sus coordenadas en la inecuación. Tomamos, por ejemplo, el punto $(0, 0)$:

$$3 \cdot 0 - 0 < 2 \rightarrow 0 < 2$$

Las coordenadas del punto $(0, 0)$ son solución de la inecuación, y también lo son las coordenadas de todos los puntos del semiplano que lo contiene.

- Sombreamos el semiplano solución y marcamos con un trazo discontinuo la recta $y = 3x - 2$.

Con ello, indicamos que las coordenadas de los puntos de dicha recta no son solución de la inecuación, ya que se trata de una desigualdad estricta ($<$).



Ejemplo 9

Resolvamos gráficamente la inecuación:
$x + y \geq 0$

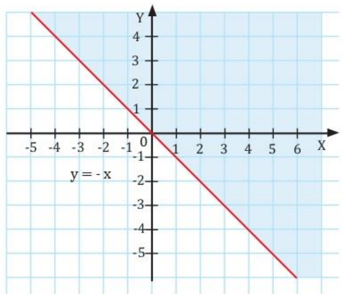
- Representamos la recta $x + y = 0$, que equivale a $y = -x$.
- Consideramos un punto de uno de los semiplanos en que queda dividido el plano y sustituimos sus coordenadas en la inecuación. Tomamos, por ejemplo, el punto $(0, -1)$:

$$0 + (-1) \geq 0 \rightarrow -1 \geq 0 \quad \text{(Falso)}$$

Las coordenadas del punto $(0, -1)$ no son solución de la inecuación, y tampoco lo son las de todos los puntos del semiplano que lo contiene.
Por tanto, las soluciones serán las coordenadas de los puntos del otro semiplano.

- Sombreamos el semiplano solución y marcamos con un trazo continuo la recta $y = -x$.

Con ello, indicamos que los puntos de dicha recta son solución de la inecuación, ya que se trata de una desigualdad no estricta ($\geq$).



8.3. Sistemas lineales de inecuaciones con dos incógnitas

Considera el siguiente conjunto de inecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$x + y < 10$$

$$x - y \geq 6$$

Si imponemos que todas ellas han de verificarse simultáneamente, tenemos un sistema lineal de inecuaciones.

Llamamos sistema lineal de inecuaciones con dos incógnitas a un conjunto de inecuaciones lineales con dos incógnitas que deben verificarse simultáneamente.

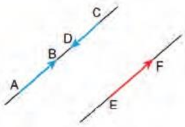
UNIDAD 3

CONTENIDO:

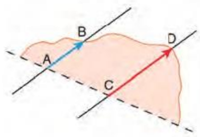
- Vectores-Equipolencia de vectores-Vectores libres
- Operaciones con vectores-Adición de vectores
- Multiplicación por un número real
- El espacio vectorial R3 4. Componentes

3ro Bachillerato

- Dos vectores fijos no nulos tienen la misma dirección si están sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.



- Dos vectores fijos no nulos con la misma dirección y que no están sobre la misma recta tienen el mismo sentido cuando sus extremos están en el mismo semiplano de los dos que determina la recta que pasa por sus orígenes.



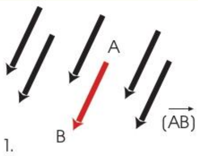


Fig. 1.

1. VECTORES

Existen magnitudes, como la temperatura, el tiempo o la masa, que quedan determinadas completamente por un número: son las magnitudes escalares.

En cambio, otras, como la velocidad o la fuerza, necesitan, además, de una dirección y un sentido para quedar completamente determinadas: son las magnitudes vectoriales.

A estas las representamos matemáticamente mediante vectores.

Vectores fijos

Dados dos puntos A y B del espacio, denominamos vector de origen A y extremo B al par ordenado (A,B), representados por $\overrightarrow{AB}$.

Así pues, todo vector fijo posee una dirección, una magnitud y un sentido.

- La dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta que pasa por A y B.
- La magnitud o módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la magnitud del segmento AB. Representamos con $|\overrightarrow{AB}|$.
- El sentido del vector $(\overrightarrow{AB})$ es el que se define sobre la recta cuando nos trasladamos de A a B.

1.1. Equipolencia de vectores

Los vectores representados en la figura 1 tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido. Diremos que son equipolentes.

Dos vectores fijos son equipolentes si tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido.

Analiza que dado cualquier vector $\overrightarrow{AB}$ y cualquier punto C, existe un único vector con origen en C y equipolente a $\overrightarrow{AB}$, y un único vector con extremo en C y equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

1.2. Vectores libres

La relación de equipolencia permite clasificar el conjunto de vectores fijos del espacio en colecciones de vectores, cada una de las cuales estará formada por todos los vectores fijos equipolentes a uno dado. Cada colección constituye un vector libre.

Se denomina vector libre al conjunto de vectores fijos equipolentes a uno dado.

Cada uno de los vectores fijos que componen un vector libre es un representante de este vector.

Dirección, módulo y sentido de un vector libre

Puesto que un vector libre está formado por vectores fijos equipolentes y éstos tienen todos la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido, podemos hablar de la dirección, el módulo y el sentido de un vector libre.

Se denomina dirección, módulo y sentido de un vector libre a la dirección, el módulo y el sentido de uno cualquiera de sus representantes

2. OPERACIONES CON VECTORES

En el conjunto de vectores en el espacio, que llamaremos $\mathbb{R}^3$, definimos dos operaciones.

2.1. Adición de vectores

Llamamos suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y lo representamos por $\vec{u} + \vec{v}$, al vector que obtenemos del siguiente modo:

- Tomamos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$.
- Trazamos el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y cuyo extremo es el de $\vec{v}$.

Y TAMBIÉN: ¿?

El conjunto de los vectores libres del espacio, $\mathbb{R}^3$, con la operación de la adición es un grupo conmutativo. Además, el producto de vectores por un número real cumple las propiedades P_1, P_2, P_3 y P_4. Decimos, entonces, que el conjunto $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Propiedades

- Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Elemento neutro: Es el vector nulo que representamos por $\vec{0}$.

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

- Elemento opuesto: Todo vector $\vec{u}$ tiene un elemento opuesto, $-\vec{u}$, que es el vector de la misma dirección y el mismo módulo, pero de sentido opuesto.

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

La existencia de elemento opuesto para la suma de vectores permite restar vectores. Así, dados dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener $\vec{u} - \vec{v}$ basta con construir el vector $-\vec{v}$ y sumárselo a $\vec{u}$, tal y como indicamos en la figura 2.

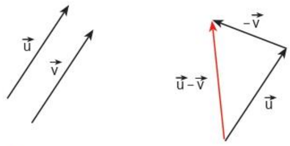


Fig. 2.

Observa en la figura 3 que, si colocamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con origen común y completamos un paralelogramo, obtenemos fácilmente los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$. A este método para sumar dos vectores lo conocemos como regla del paralelogramo.

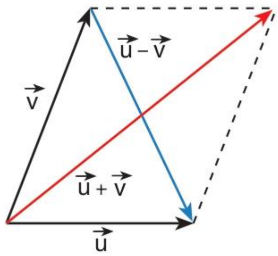
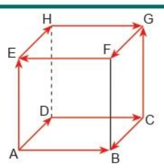


Fig. 3.

Actividades

1. En el cubo de la figura hay representados 10 vectores fijos diferentes.

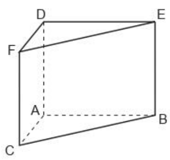
   Agrúpalos en conjuntos de vectores equipolentes.



2. ¿Cuántos vectores fijos distintos y cuántos vectores libres determinan los cuatro vértices de un rectángulo?

3. **Escribe** los 36 vectores fijos distintos que determinan los seis vértices del prisma triangular de la figura.

   ¿Cuántos vectores libres lo determinan?



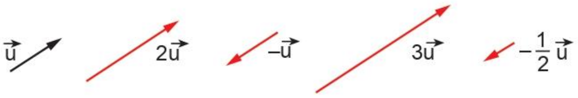
4. ¿Cuántos vectores fijos distintos y cuántos vectores libres determinan los cuatro vértices de un tetraedro?

2.2. Multiplicación por un número real

Es posible multiplicar un vector por un número real $k \in \mathbb{R}$, al que llamamos un escalar para diferenciarlo de un vector. En efecto, al multiplicar el vector $\vec{u}$ por el escalar 2, obtenemos el vector $2\vec{u}$ que es igual a $\vec{u} + \vec{u}$. Este vector tiene la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ pero es el doble de largo.

En general llamamos producto de un escalar k por un vector $\vec{u}$, y lo representamos por $k\vec{u}$, al vector libre que tiene:

- La misma dirección que $\vec{u}$.
- El módulo de $\vec{u}$ multiplicado por el valor absoluto de k.
- El sentido de $\vec{u}$, si k es positivo, u opuesto a $\vec{u}$, si k es negativo.



Propiedades $\forall k, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \wedge \vec{u}, \vec{v}$ vectores se cumple que:

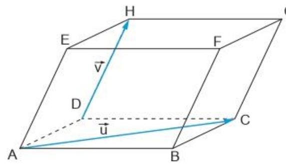
- Distributiva vectorial: $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- Distributiva respecto a la suma escalar: $(k_1 + k_2)\,\vec{u} = k_1\,\vec{u} + k_2\vec{u}$
- Asociativa respecto al producto escalar: $k_1\,(k_2\,\vec{u}) = (k_1\,k_2)\vec{u}$
- Escalar neutro: $1\vec{u} = \vec{u}$

Ejemplo 1

Sea el paralelepípedo ABCDEFGH y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, **efectúa** las siguientes operaciones:

a. $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

b. $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$



Y TAMBIÉN: ¿?

Como, $(u + v) + w = u + (u + w)$, en lo sucesivo escribiremos simplemente $u + v + w$.

Y TAMBIÉN: ¿?

James Joseph Sylvester
Nació el 3 de septiembre de 1814 en Londres, Inglaterra. Realizó los estudios primarios en Londres y los secundarios, en el Instituto Real en Liverpod. En 1833, ingresó a la Universidad St John en Cambridge.
Matemático británico, profesor en las universidades de Londres, Baltimore y Oxford. En colaboración con el amigo A. Cayley, estableció la teoría de las invariantes algebraicas y la de los determinantes. Descubrió un método para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones y creó un importante vocabulario matemático. Fue además fundador del American Journal of Mathematics.

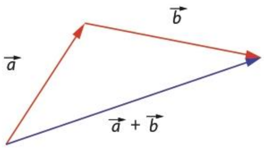


Fig. 4.

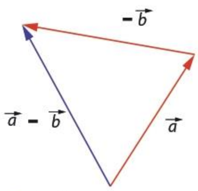


Fig. 5.

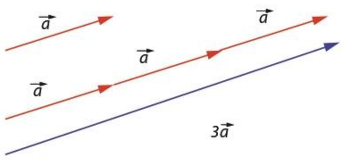


Fig. 6.

Ejemplo 2

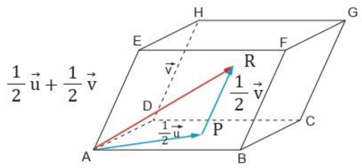
a. Sea P el centro de la cara ABCD y R el centro del paralelepípedo, tomamos $\overrightarrow{AP}$ como el vector $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $\overrightarrow{PR}$ como el vector $\frac{1}{2}\vec{v}$. Entonces:

$$\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}$$

Podemos comprobar que, si tomamos otros vectores para representar $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el resultado siempre es equipolente a $\overrightarrow{AR}$. Así, por ejemplo, si S es el punto medio de la arista $\overrightarrow{CG}$ y tomamos $\overrightarrow{PC}$ como representante de $\frac{1}{2}\vec{u}$ y CS como representante de $\frac{1}{2}\vec{v}$, tenemos:

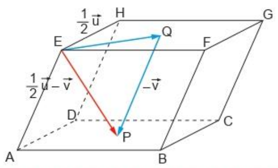
$$\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{PS}$$

Pero $\overrightarrow{PS}$ es equipolente a $\overrightarrow{AR}$. Entonces, vemos que el resultado no depende de los vectores representantes escogidos.



b. Sea P el centro de la cara ABCD y Q el centro de la cara EFGH, tomamos $\overrightarrow{EQ}$ como el vector $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $\overrightarrow{QP}$ como representante del vector opuesto de $\vec{v}$, con origen en el extremo de $\overrightarrow{EQ}$. Entonces:

$$\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{EP}$$



Y TAMBIÉN: ¿?

http://goo.gl/2uJ5Sk

Hamilton, William Rowan (1805 -1865).

Matemático irlandés, nacido en Dublín en el año 1805. Descubrió y desarrolló la teoría de los cuaternios. Fue un niño prodigio en muy diversas áreas de las letras y las ciencias. A muy temprana edad, apenas había cumplido los trece años, dominaba más de una docena de idiomas, y varios años antes había mostrado ya interés por la literatura matemática clásica, por los estudios de Newton y Laplace, entre otros. Ingresó en el Trinity College de Dublín y obtuvo la calificación máxima en griego y en física matemática.

Un cuaternio es un número de la forma $ae+bi+cj+dk$, con a,b,c,d números reales. Los números complejos se han construido a partir de un espacio vectorial de dos dimensiones. Sin embargo, los cuaternios pertenecen a un espacio vectorial de cuatro dimensiones reales.

Actividades

5. En el prisma de la figura, $\vec{u}=[\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v}=[\overrightarrow{AD}]$ y $\vec{w}=[\overrightarrow{AE}]$. **Halla** en forma gráfica:

a. $\vec{u}+\vec{w}$

b. $\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

c. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

d. $\vec{v}-\vec{w}$

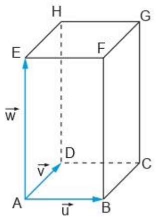
e. $\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{w}$

f. $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

g. $\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

h. $\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{w}$

i. $\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}$



3. EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^3$

Sabemos ya que, para ubicar un punto en el plano, necesitamos un par ordenado (a, b) para representarlo, donde a es la coordenada en el eje x, y b es la coordenada en el eje y. Por este motivo decimos que un plano tiene dos dimensiones.

Para ubicar un punto en el espacio, necesitamos tres números. A cualquier punto en el espacio lo representamos mediante una terna ordenada (a, b, c) de números reales. Para representar puntos en el espacio, escogemos un punto fijo O al que llamamos el *origen*, y pasamos tres líneas perpendiculares entre sí, a las que llamamos los *ejes coordenados*. Estos son el eje x, el eje y y el eje z. Usualmente pensamos en los ejes x e y como los ejes horizontales y el eje z como el eje vertical, como muestra la figura.

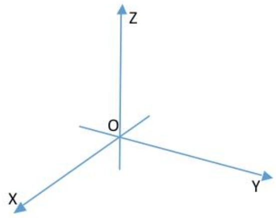


Fig. 7.

Los tres ejes coordenados, a su vez, forman tres planos coordenados. El plano xy es el plano que contiene los ejes x e y. El plano yz contiene los ejes y y z, y el plano xz contiene los ejes x y z.

Para visualizarlo mejor, podemos observar una esquina inferior de cualquier habitación. La pared a tu izquierda es el plano xz, la pared a tu derecha es el plano yz, y el piso es el plano xy.

Ahora, si P es un punto cualquiera en el espacio, a es la distancia perpendicular desde el plano yz al punto P, b la distancia perpendicular desde el plano xz hasta P, y c la distancia perpendicular desde el plano xy hasta P. Representamos P por la terna ordenada (a, b, c) de números reales, y llamamos coordenadas de P a a, b y c. Para ubicar el punto (a,b,c) empezamos en el origen O y nos movemos a unidades por el eje x, después b unidades paralelo al eje y, y finalmente, c unidades paralelo al eje z, como en la figura.

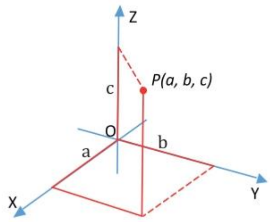


Fig. 8.

Dado que a todo punto en el espacio lo podemos representar por ternas ordenadas de números reales, denotamos al espacio tridimensional por $\mathbb{R}^3$.

Actividades

6. **Ubica** en el espacio los siguientes puntos.
   a. $(-5; 3; 1)$
   b. $(2; -1; 7)$
   c. $(7; 2; 0)$

4. COMPONENTES

Dado un punto P, podemos definir su posición mediante un vector $\overrightarrow{OP}$ que tiene como origen el punto O y como extremo el punto P. Llamamos a este vector el *vector posición de* P. Lo denotamos con $\vec{p}$.

Si el punto P tiene coordenadas (a, b, c), podemos determinar el vector posición $\vec{p}$ utilizando la posición de P de la siguiente manera:

$\vec{p} = (a, b, c)$

Llamamos a estas coordenadas los *componentes del vector* p.

Las coordenadas de un punto *P (a, b, c)* en el espacio son las componentes del vector de posición de *P*.

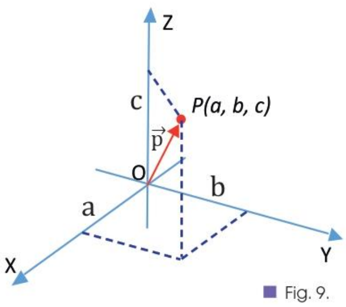


Fig. 9.

Ahora, podemos definir vectores únicos basados en sus componentes. Por ejemplo, definimos los siguientes vectores:

$$\vec{i} = (1; 0; 0) \qquad \vec{j} = (0; 1; 0) \qquad \vec{k} = (0; 0; 1)$$

Llamamos a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ los vectores base de $\mathbb{R}^3$, pues apuntan en la dirección positiva de los ejes X, Y y Z.

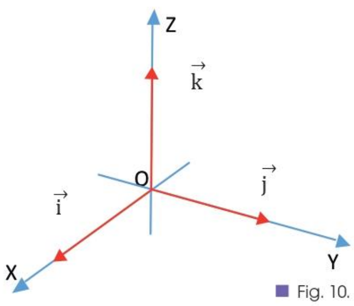


Fig. 10.

Y TAMBIÉN: ¿?

Josiah Willard Gibbs

Físico estadounidense (1839-1903).

Fue profesor de Física en la Universidad de Yale.

En 1881 apareció su Vector Analysis, obra en la que desligó la parte vectorial de la parte escalar en los cuaterniones de Hamilton.

Este trabajo, pensado en principio como un pequeño escrito de difusión académica, marcó el inicio de lo que en la actualidad conocemos como análisis vectorial.

UNIDAD 4

CONTENIDO:

- Sucesos-Suceso seguro y suceso imposible
- Operaciones con sucesos
- Probabilidad-Definición experimental
- Teorema de la probabilidad total-Teorema de Bayes

3ro Bachillerato

1. SUCESOS

Al repetir un mismo experimento en igualdad de condiciones, es posible obtener siempre el mismo resultado, o bien, que este sea imprevisible. En el primer caso, decimos que el experimento es determinista. En el segundo, decimos que es aleatorio.

El primer paso que hay que efectuar para estudiar un experimento aleatorio consiste en determinar el conjunto de resultados posibles. A cada uno de ellos lo llamamos *suceso elemental*.

Al conjunto de todos los resultados posibles lo denominamos *espacio muestral* y lo representamos por la letra E, o por la letra griega Ω.

Así, por ejemplo, en el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado y observar su puntuación, el espacio muestral es:

$$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Consideremos ahora la situación A: obtener un número par. Podemos expresarla mediante el conjunto $A=\{2, 4, 6\}$, que es un subconjunto de Ω.

Llamamos suceso a cualquier subconjunto de Ω, es decir, a cualquier conjunto de resultados posibles. A los sucesos los representamos mediante letras mayúsculas.

Decimos que un suceso se cumple u ocurre al realizar un experimento aleatorio si el resultado obtenido forma parte de dicho suceso.

Ejemplo 1

Tenemos una urna con ocho bolas numeradas de la 1 a la 8. El experimento consiste en extraer una bola y observar su número.

a. Determinemos el espacio muestral del experimento y definamos por extensión los siguientes sucesos:

A: sacar un número menor que 5 B: sacar un número par

b. Al extraer una bola de la urna observamos el número 8. Indiquemos si se cumplen los sucesos A y B.

- Los resultados posibles son los números del 1 al 8. Entonces:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Por consiguiente:

$$A=\{1, 2, 3, 4\} \quad B=\{2, 4, 6, 8\}$$

Se cumplen los sucesos tales que ocho sea uno de sus elementos. Así pues, se cumple B, pero no A.

Actividades

1. Realizamos el experimento aleatorio en el que extraemos una carta de una baraja y miramos su palo.

a. **Determina** el espacio muestral.

b. **Define** los sucesos A: sacar diamantes y B: sacar corazones o tréboles.

c. Al extraer una carta, obtenemos un trébol. **Indica** si se cumplen los sucesos A y B.

1.1. Suceso seguro y suceso imposible

De entre los sucesos que podemos considerar al realizar un experimento aleatorio, hay algunos que poseen características especiales.

Vamos a estudiar estos sucesos tomando como ejemplo el experimento que consiste en lanzar un dado.

Tipo de suceso	Ejemplo
Llamamos suceso seguro al que contiene todos los resultados posibles del experimento. Este suceso se cumple siempre y coincide con el espacio muestral Ω.	El suceso A: Sacar un número menor o igual que seis está formado por todos los resultados posibles del experimento: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ Este suceso se verifica siempre.
Llamamos suceso imposible al subconjunto de Ω que no contiene ningún resultado posible del experimento. Este suceso no se cumple nunca y coincide con el conjunto vacío $\emptyset$.	El suceso B: Sacar un cero no está formado por ningún resultado posible del experimento: $B = \emptyset$ Este suceso no se cumple jamás.

Tabla 1.

1.2. Operaciones con sucesos

Hemos visto que los diferentes sucesos asociados con un experimento aleatorio son subconjuntos del espacio muestral Ω.

Por tanto, podemos realizar con ellos las operaciones habituales con conjuntos.

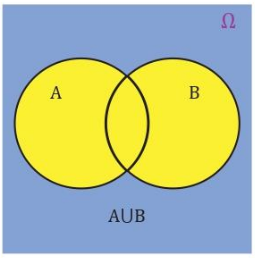
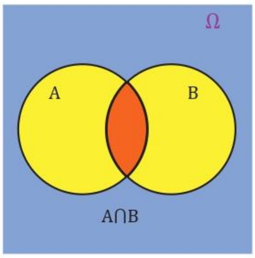
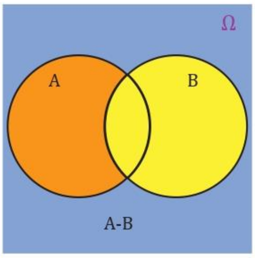
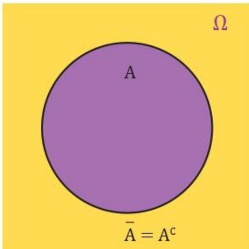
Unión		Intersección	
Llamamos unión de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A o en B. Lo representamos por $A \cup B$. El suceso $A \cup B$ se cumple si se cumplen A o B.		Llamamos intersección de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A y en B a la vez. Lo representamos por $A \cap B$. El suceso $A \cap B$ se cumple si se cumplen simultáneamente A y B.	
Diferencia		**Complemento**	
Llamamos diferencia entre el suceso A y el suceso B al suceso formado por todos los resultados que están en A, pero no en B. Lo representamos como A-B. El suceso A-B se cumple si se cumple A pero no se cumple B.		Llamamos complemento o contrario del suceso A, y se representa por $\bar{A}$ o A^c, al suceso formado por todos los resultados del experimento que no están en A, es decir, a la diferencia Ω - A. El suceso A^c se cumple si no se cumple A.	

Tabla 2.

Propiedades de las operaciones con sucesos

Podemos demostrar que las operaciones anteriores cumplen las propiedades de la siguiente tabla.

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identidad	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$
Involución	$A \cup \underline{A} = \Omega$	$A \cap \underline{A} = \emptyset$
Complementación	$\bar{\bar{A}} = A$	
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \bar{B} \cap \bar{A}$ $(A \cup B)^c = B^c \cap A^c$	$\overline{A \cap B} = \bar{B} \cup \bar{A}$ $(A \cap B)^c = B^c \cup A^c$

Tabla 3.

Ejemplo 2

Tomemos una carta de una baraja inglesa y observemos su palo. Efectuemos las siguientes operaciones con los sucesos P: sacar corazones, Q: no sacar espadas y R: no sacar ni diamantes ni espadas.

a. $\bar{R}$ b. $R \cup Q$ c. $R \cap Q$ d. $Q - P$

Si designamos por D (diamantes), C (corazones), E (espadas) y T (trebol) los cuatro palos de la baraja, tenemos que:

$$\Omega = \{D, C, E, T\}$$

Así pues:

$$P = \{C\}; Q = \{D, C, T\}; R = \{C, T\}$$

De esta manera:

a. $\bar{R} = \Omega - R = \{D, C, E, T\} - \{C, T\} = \{D, E\}$

b. $R \cup Q = \{C, T\} \cup \{D, C, T\} = \{D, C, T\}$

c. $R \cap Q = \{C, T\} \cap \{D, C, T\} = \{C, T\}$

d. $Q - P = \{D, C, T\} - \{C\} = \{D, T\}$

Ejemplo 3

Lanzemos un dado y observemos su puntuación. Comprobemos que se cumplen las leyes de De Morgan con los sucesos A: sacar 2 o 3 y B: sacar más de 4.

Expresamos los sucesos A, $\bar{A}$, B y $\bar{B}$ por extensión:

$A = \{2, 3\}; \bar{A} = \{1, 4, 5, 6\}$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6\}; \bar{B} = \{1, 2, 3, 4\}$

Así pues, para la primera ley de De Morgan:

$\overline{A \cup B} = \Omega - (A \cup B) = \Omega - (\{2, 3\} \cup \{5, 6\}) = \{1, 4\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 4\}$

En efecto: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

De igual forma, para la segunda ley de De Morgan:

$\overline{A \cap B} = \Omega - (A \cap B) = \Omega - (\{2, 3\} \cap \{5, 6\}) = \Omega - \emptyset = \Omega$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 4, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

En efecto: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Llamamos conjunto potencia al conjunto formado por todos los sucesos asociados con un experimento. Lo representaremos por $P(\Omega)$.

Actividades

2. De una bolsa donde hay veinte bolas numeradas del 1 al 20, extraemos una. **Comprueba** que se cumplen las propiedades asociativa y distributiva con los sucesos A: obtener número par, B: obtener número primo y C: obtener un número tal que la suma de sus cifras sea 5.

1.3. Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

Dos o más sucesos son compatibles, si pueden cumplirse simultáneamente; es decir, si tienen al menos un resultado común. Caso contrario, son incompatibles o mutuamente exclusivos y su intersección es el conjunto vacío $\emptyset$.

Considera el experimento consistente en lanzar un dado. Los sucesos $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, y $C = \{4, 5\}$ cumplen lo siguiente:

A y B son compatibles, y B y C son incompatibles, $B \cap C = \emptyset$.

Sean ahora los sucesos $D = \{1, 2\}$, $E = \{4, 5\}$ y $F = \{6\}$. **Observa** en la figura 1 que todas las parejas posibles que se pueden formar entre estos sucesos (D y E, D y F, E y F) son incompatibles, ya que sus respectivas intersecciones son $\emptyset$.

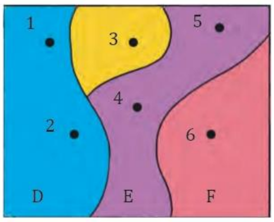


Fig. 1.

Decimos que tres o más sucesos son incompatibles dos a dos si es incompatible cualquier pareja que se pueda formar entre ellos.

1.4 Sistema completo de sucesos

Considera de nuevo el experimento que consiste en lanzar un dado. Los sucesos $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{4, 5\}$ e $I = \{6\}$ cumplen lo siguiente:

- Su unión es el espacio muestral: $G \cup H \cup I = \Omega$ S 1.
- Son incompatibles en pares: $G \cap H = \emptyset$, $G \cap I = \emptyset$, $H \cap I = \emptyset$ S 2.

Decimos que G, H e I forman un sistema completo de sucesos.

Si Ω es el espacio muestral de un experimento aleatorio, los sucesos $A_1,\dots,A_n$ forman un sistema completo de sucesos solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.
- $A_1,\dots,A_n$ son incompatibles dos a dos.

Ejemplo 4

Extraemos una bola de una urna donde hay una bola blanca (B), una roja (R) y una negra (N). Averigüemos si son compatibles o incompatibles los sucesos $U = \{B, R\}$, $V = \{R, N\}$ y $W = \{B, N\}$.

- ¿Forman U, V y W un sistema completo de sucesos?

Para Tenemos que $U \cap V \cap W = \emptyset$. Por tanto, U, V y W son incompatibles.

- Para ver si U, V y W forman un sistema completo de sucesos debemos comprobar S1 y S2:

S1: $U \cup V \cup W = \{B, R\} \cup \{R, N\} \cup \{B, N\} = \{B, R, N\} = \Omega \Rightarrow$ Se cumple.

S2: $U \cap V = \{R\}$, $V \cap W = \{N\}$ y $U \cap W = \{B\} \Rightarrow$ No se cumple.

Vemos que U, V y W no son incompatibles dos a dos, por lo que no forman un sistema completo de sucesos.

Actividades

3. Dado el experimento que consiste en extraer una carta de una baraja de cartas y los sucesos A: obtener un rey, B: obtener corazones o espadas, C: obtener una letra y D: obtener el tres de trebol, **indica** si los siguientes sucesos son compatibles o incompatibles:

a. A y B b. A y C c. B y D d. A, C y D e. A, B y C f. A, B y D

2. PROBABILIDAD

Inicialmente, nos referimos a la probabilidad como una medida del grado de certeza sobre la ocurrencia de un suceso o no. Recordemos las definiciones experimental y axiomática de la probabilidad.

2.1. Definición experimental

Efectuamos varias series de N realizaciones de un experimento aleatorio:

- Al número de veces que se cumple un suceso A en cada una de ellas lo llamamos frecuencia absoluta de A y lo simbolizamos por n_A.
- Al cociente entre las frecuencias absolutas y el número de realizaciones, N, del experimento lo llamamos frecuencia relativa del suceso A y lo simbolizamos por f_A.

A medida que aumenta el número de realizaciones del experimento, las frecuencias relativas de un suceso tienden hacia cierto valor. Esta propiedad permite dar la siguiente definición experimental de la probabilidad de un suceso:

Dado cualquier suceso A asociado con un experimento aleatorio, llamamos probabilidad de A, $P(A)$, al número hacia el que tienden las frecuencias relativas de A al aumentar el número de realizaciones del experimento.

2.2. Definición axiomática

Aunque la definición experimental que acabamos de estudiar parece satisfacer la intuición, tiene ciertos inconvenientes:

- Sería necesario repetir infinitas veces el experimento para conocer el límite de las frecuencias relativas, lo que no es factible.
- Nada nos asegura que la regularidad de las frecuencias relativas sea cierta para cualquier número de repeticiones del experimento.

Para superar estos problemas, damos una definición axiomática de la probabilidad de un suceso, matemáticamente mucho más rigurosa.

Dado el espacio muestral Ω asociado con un experimento aleatorio, llamamos probabilidad a una función:

$$P: P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \rightarrow P(A)$$

Que asocia a cada suceso A un número real llamado probabilidad de A, $P(A)$, y que cumple los siguientes axiomas:

- La probabilidad de cualquier suceso A es positiva o cero: $P(A) \geq 0$
- La probabilidad del suceso seguro vale 1: $P(\Omega) = 1$
- La probabilidad de la unión de un conjunto (finito o infinito) de sucesos incompatibles dos a dos, $A_1,\ldots,A_i,\ldots$, es la suma de las probabilidades de los sucesos:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

En matemáticas, un axioma es una afirmación que se acepta sin demostración.

3.4. Teorema de la probabilidad total

A partir del concepto de *probabilidad condicionada*, es posible enunciar una regla práctica para calcular la probabilidad de ciertos sucesos. Considera para ello el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7

Una fábrica de tornillos dispone de dos máquinas que elaboran el 75% y el 25% de la producción total.

El porcentaje de tornillos defectuosos que produce cada máquina es, también respectivamente, del 4% y del 2%. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un tornillo al azar, este sea defectuoso?

Consideramos los sucesos D: tornillo defectuoso, M_1: tornillo elaborado por la máquina 1 y M_2: tornillo elaborado por la máquina 2. Observamos el diagrama en árbol de la figura 3.

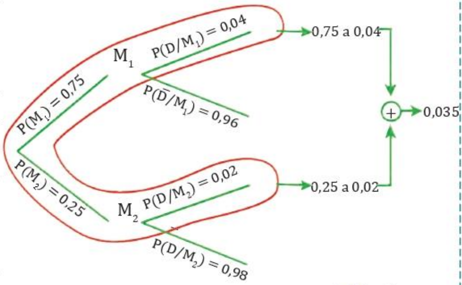


Fig. 3.

Según el diagrama, podemos calcular la probabilidad de D a partir de la suma de las probabilidades de cada rama:

$$P(D) = 0.75 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.02 = 0.035$$

Observamos que los términos de esta suma son:

$$P(M_1) = 0{,}75 \quad P(M_2) = 0{,}25 \quad P(D \mid M_1) = 0{,}04 \quad P(D \mid M_2) = 0{,}02$$

Así pues, podemos expresar $P(D)$ como:

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D \mid M_1) + P(M_2) \cdot P(D \mid M_2)$$

Si generalizamos este resultado, llegamos al enunciado del teorema de la probabilidad total:
Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera, todos asociados con un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)$$

Actividades

8. Disponemos de cuatro urnas con bolas, de tal manera que:
   - En la primera urna hay cuatro bolas rojas y cinco blancas.
   - En la segunda urna hay tres bolas rojas y ocho blancas.
   - En la tercera urna hay cinco bolas rojas y dos blancas.
   - En la cuarta urna hay dos bolas rojas.

   Si elegimos una urna al azar y extraemos de ella una bola, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea roja?

3.5. Teorema de Bayes

Vamos a estudiar el ejemplo del apartado anterior desde otro punto de vista. Si sabemos que un tornillo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por cierta máquina?

Calculemos la probabilidad de que el tornillo haya sido fabricado por la máquina 1, sabiendo que ha resultado defectuoso, es decir, $P(M_1 \mid D)$.

Según la definición de *probabilidad condicionada*, tenemos:

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$$

Por otro lado, del diagrama de la figura podemos calcular la probabilidad de $P(M_1 \cap D)$, que corresponde a la de la rama señalada:

$$P(M_1 \cap D) = P(M_1) \cdot P(D \mid M_1)$$

Si tenemos en cuenta además el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D \mid M_1) + P(M_2) \cdot P(D \mid M_2)$$

llegamos finalmente a:

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1) \cdot P(D \mid M_1)}{P(M_1) \cdot P(D \mid M_1) + P(M_2) \cdot P(D \mid M_1)}$$

Con los datos del ejemplo:

$$P(M_1|D) = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}04}{0{,}75 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}02} = 0{,}857$$

Al enunciar de forma general el resultado anterior, llegamos al llamado teorema de Bayes:

Sea $A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera, todos ellos asociados con un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1),\ldots,P(A_i),\ldots,P(A_n)$ son no nulas, se cumple que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)}$$

Actividades

9. En un congreso se reúnen 250 médicos del Benelux, de los cuales 115 son holandeses; 65, belgas, y 70, luxemburgueses. De ellos, el 75% de los holandeses, el 60% de los belgas y el 65% de los luxemburgueses están a favor de la utilización de determinada vacuna. Seleccionamos al azar uno de los médicos y resulta estar a favor del uso de la vacuna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Luxemburgo?