Rafael Galeth

COLEGIO VIRTUAL INTENSIVO PCEI

8 Matemáticas

octavo año

www.colegiopceirafaelgaleth.com

Ministerio de Educación

Equipo Técnico
Enoc Felipe Quishpe Guano
Duraymi Huete Chávez

ISBN: 978-9942-22-414-9

Equipo Técnico de Editorial Don Bosco
Gerente General de Editorial Don Bosco
Marcelo Mejía Morales

Dirección Editorial
Paúl F. Córdova Guadamud

Editora de área
Angelina Gajardo Valdés

Autores
Valeria Arias Dousdebes
Christian Ronald Armendariz Zambrano

Diseño y diagramación
Pamela Alejandra Cueva Villavicencio
Alexander Castro Cepeda
Israel Ponce Silva
Juan Fernando Bolaños Enríquez

Ilustración
Marco Antonio Ospina Belalcázar
Archivo Editorial Don Bosco

Edición 2023

Av. Amazonas N34-451 y Av. Atahualpa
Quito-Ecuador
www.educacion.gob.ec

Ministerio de Educación

República del Ecuador

Ministerio
de Educación

República
del Ecuador

ÍNDICE DE CONTENIDOS OCTAVO

UNIDAD 1

UNIDAD 2

UNIDAD 3

UNIDAD 4

UNIDAD 1

CONTENIDO:

- Operaciones básicas con números enteros
- Propiedades de los números enteros
- Representación en la recta numérica de los números enteros
- Potenciación y radicación con números enteros

8
octavo año

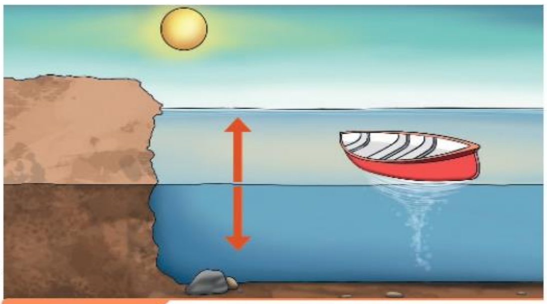
1. Operaciones básicas con números enteros

1.1. Propiedades de los números enteros

D.C.D. M.4.1.1. Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos y mejorando las habilidades en actividades transaccionales.

Con los números naturales no era posible realizar restas donde el minuendo era menor que el sustraendo, pero, en la vida real, nos encontramos con operaciones de este tipo donde a un número menor hay que restarle uno mayor.

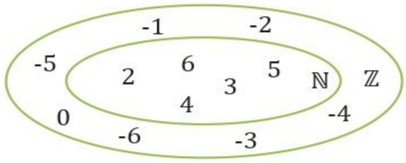
Algunas de estas situaciones son: la necesidad de representar el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, la profundidad del nivel del mar, entre otras.



Representación gráfica de números naturales.

En la siguiente figura podemos observar números naturales precedidos por los signos + y -. Todos ellos forman parte del conjunto de los números enteros.

El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ es aquel que contiene los números naturales, {1, 2, 3...}, y, adicionalmente, contiene sus contrapartes negativas.

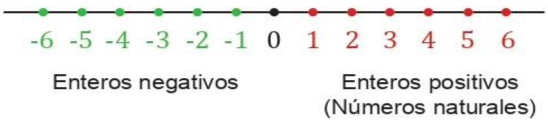


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Los enteros son parte de los números reales, cuya clasificación es más amplia que los enteros.

Los números enteros se dividen en tres partes:

1. Enteros positivos o números naturales
2. Enteros negativos
3. Cero



Trabajo individual

1. Relacione con una línea los números con su clasificacion

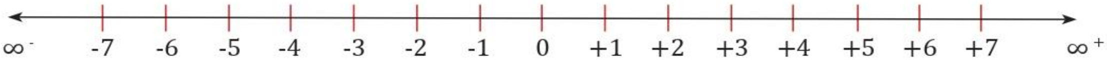
a. −7	
b. 10	1. Entero positivo
c. −4	
d. −1	
f. 3	2. Entero negativo
g. − 99	

Mundo Digital

Puedes demostrar lo que entendiste ingresando a la página web de *Vitutor*, entrar en *Ejercicios interactivos* y, en *Números enteros* o en el enlace: https://goo.gl/bzMWVy, contestar las preguntas.

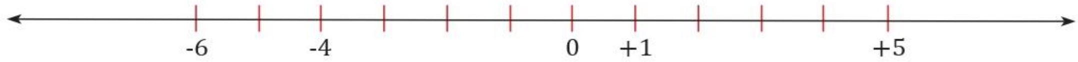
Responde: ¿Todo número entero es natural?

Los números enteros pueden ser representados sobre una recta de esta manera:



Los números enteros positivos se ubican a la derecha del 0; y los números enteros negativos a la izquierda del 0.

A partir de esta representación, podemos ordenarlos. Dados dos números enteros cualesquiera, es más grande el que se encuentra más a la derecha sobre la recta.



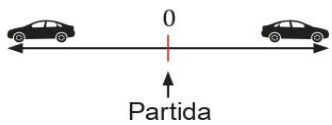
$$-6 < -4 < 0 < +1 < +5$$

Valor absoluto

El *valor absoluto de un número entero positivo o negativo* es el número natural que obtenemos al prescindir de su signo y lo representamos escribiendo el número entero entre dos barras verticales.

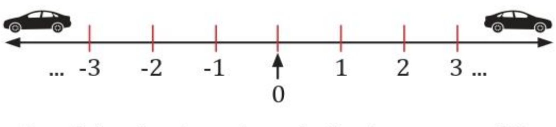
$|-8|=8$ $\quad$ $|-14|=14$ $\quad$ $|7|=7$

Una manera sencilla de entender el valor absoluto de un número es imaginar dos vehículos que parten de un mismo lugar, pero en direcciones opuestas y a la misma velocidad.



¿Habrán recorrido la misma distancia después de un minuto?

Si tomamos el punto de partida como 0 en la recta numérica:



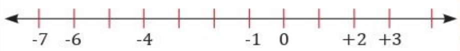
La distancia de cada auto hasta cero será la misma, pero el auto de la izquierda estará ubicado en la parte negativa de la recta; mientras que el de la derecha, en la parte positiva.

La distancia hasta el cero de un número cualquiera es su valor absoluto.

El número opuesto de un número es el que sumado al número original da un valor de cero. Así tenemos que el opuesto de +4 es -4. El opuesto de -8 es +8.

Ejemplo 1

Representemos estos números enteros sobre una recta, ordenémoslos de menor a mayor y determinemos su valor absoluto: 0, -4, +2, -6, +3, -7, -1.



El orden creciente es: -7 < -6 < -4 < -1 < 0< +2 < +3.

Y los valores absolutos de estos números enteros son:

$|-4| = 4$ $\quad$ $|-6| = 6$ $\quad$ $|-7| = 7$

$|+2| = 2$ $\quad$ $|+3| = 3$ $\quad$ $|-1| = 1$

Aplicación para la vida

Como se puede ver por la definición del valor absoluto, este nos permite conocer una distancia a recorrer en un viaje sin importar la dirección; también nos ayuda a identificar el valor de una deuda. Por ejemplo, cuando decimos que alguien debe $8, se considera como -8 pero la cantidad que se debe es 8 no -8.

El número opuesto

El número opuesto de un número es el que, sumado al número original, da un valor de cero.

Así tenemos que el opuesto de +4 es -4. El opuesto de -8 es +8.

El número opuesto se indica de la siguiente manera:

op(+4) = -4 op(-8) = 8

Mundo Digital

Visite el siguiente enlace o en libros e internet, sobre algunos juegos de los números enteros como crucigramas, etc.

Puede usar como ayuda el siguiente enlace:

https://goo.gl/9Wm8qu

Luego imprima e intercambie las soluciones con tus compañeros de clase.

Trabajo individual

1. Expresa con números enteros estas situaciones:

   a. He ganado $ 3. ____________________

   b. He retrocedido 5 m. ________________

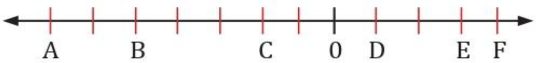
   c. Dentrodequinceaños. ________________

   d. Hace treinta años. _________________

2. Representa sobre una recta estos números enteros.

   +3, -8, -12, 0, +7, -4.

3. Relaciona cada letra con un número entero.



4. Exprese, mediante una frase, el significado de los siguientes números enteros:

   a. -5, si +5 significa ‘cinco grados sobre cero’.

   b. +2, si -2 significa que bajamos dos pisos.

   c. +623, si -100 significa que hemos perdido $ 100.

5. Clasifica estos números enteros en positivos y negativos. Después, represéntalos sobre una recta y ordénalos de menor a mayor.

+9	-6
+12	-4
+5	-9
+10	-14
	-15
	-13
	-8

— ¿Cuál tiene el mayor valor absoluto? ¿Cuál tiene el menor?

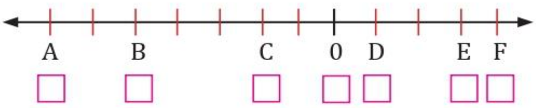
6. Recuerda que el opuesto de el número entero es el mismo número cambiado de signo.

   — Escribe los opuestos de los números de la actividad anterior.

7. Represента sobre una recta los siguientes números.

   +3, -8, -12, 0, +7, -4.

8. Relaciona cada letra con un número entero.



1.2. Representación en la recta numérica de los números enteros

D.C.D. M.4.1.2. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números enteros utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥), útiles al comparar precios, medidas, etc., en varios contextos.

Como se mencionó anteriormente, lo números enteros pueden ser representados sobre una recta de esta manera:

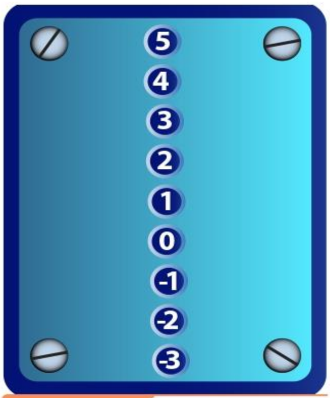
1. En una recta horizontal, se toma un punto cualquiera que se señala como cero.
2. A su derecha y a distancias iguales se van señalando los números positivos: 1, 2, 3…
3. A la izquierda del cero y a distancias iguales que las anteriores, se van señalando los números negativos: -1, -2, -3…

Ordenación de números enteros

Si ordenamos los números que representan las plantas del ascensor de un edificio, desde la inferior hasta la superior, tenemos:

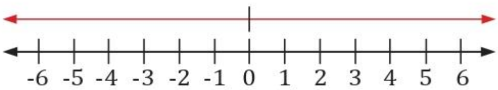
$$-3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4$$

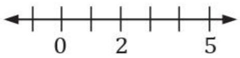
Observa que, al representarlos sobre la recta, el 4 queda a la derecha del 1, por lo que podemos asegurar que 1 < 4. De la misma manera diremos que -3 < -1, ya que el -1 queda a la derecha del -3.



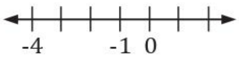
Representación gráfica de la recta numérica.

Dados dos números enteros cualesquiera, es mayor el que está representado más a la derecha sobre la recta.





$|5| = 5$, $|2| = 2$; $5 > 2 \Rightarrow 2 < 5$



$|-4| = 4$, $|-1| = 1$; $4 > 1 \Rightarrow -4 < -1$

Cualquier número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.

El 0 es menor que cualquier número entero positivo y mayor que cualquier número entero negativo.

El mayor de dos números enteros positivos es el que tiene mayor valor absoluto.

El mayor de dos números enteros negativos es el que tiene menor valor absoluto.

Ejemplo 3

Señalemos en cada uno de los siguientes pares de números enteros el mayor y representémoslos sobre una recta:

a. -11 y 8 b. 0 y -9 c. 0 y 4 d. 8 y 6 e. -7 y -6

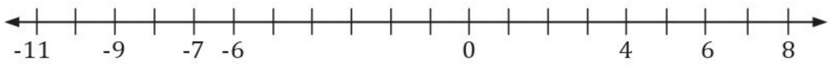
a. Un número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo: $8 > -11$.

b. El 0 es mayor que cualquier número entero negativo: $0 > -9$.

c. El 0 es menor que cualquier número entero positivo: $0 < 4 \Rightarrow 4 > 0$.

d. $|8| = 8 > |6| = 6$. El mayor de dos números enteros positivos es el que se encuentra más a la derecha. $8 > 6$.

e. $|-7| = 7 > |-6| = 6$. El mayor de dos números enteros negativos es el de menor valor absoluto: -6 > -7.



Ejemplo 4

Ordena de menor a mayor estos números enteros:

-2 0 7 -23 5

a. Primero comparamos entre los números negativos cuál tiene menor valor absoluto:

$|-23| = 23 > |-2| = 2,\ 2 < 23 \Rightarrow -23 < -2$

b. Todo número negativo es menor que 0: $-2 < 0$.

c. Todo número positivo es mayor que 0; por lo tanto, comparamos entre los números positivos cuál tiene el mayor valor absoluto:

$$|5| = 5 < |7| = 7,\ 5 < 7 \Rightarrow 7 > 5.$$

$$-23 < -2 < 0 < 5 < 7$$

Desde la Contabilidad

En el mundo de los negocios justamente es cuando entran en juego los números negativos, que permiten trabajar sobre todo en los campos de la contabilidad y finanzas. Estos últimos se utilizan para poder representar deudas o pasivos, y actuando como una resta o disminución respecto a los naturales.

Trabajo individual

2. Copia en tu cuaderno estos pares de números y escribe el signo > o < según corresponda:

-3.....8	-5.....8	0.....13
0..... -2	4.....9	4.....-10

3. Ordena de menor a mayor esta serie de números.

-7 12 -12 0 4 -1002 7 -20

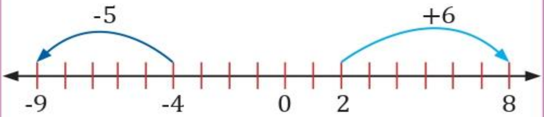
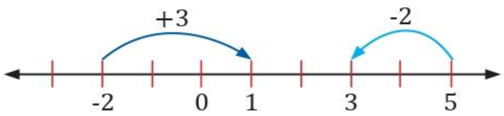
4. Escribe cuatro números enteros menores que 6 y otros cuatro mayores que -15.

1.3. Operaciones combinadas con adición, sustracción y multiplicación

D.C.D. M.4.1.3. Operar en Z (adición, sustracción, multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación, comprendiendo la utilidad de los paréntesis en la sintaxis matemática.

1.3.1. Adición o suma

Observa cómo sumamos los números enteros.

Suma de dos números enteros	
Del mismo signo	**De diferente signo**
• Sumamos los valores absolutos de los sumandos y ponemos el mismo signo de los sumandos. $(-4) + (-5) = -9$ $\quad$ $(2) + (6) = 8$ 	• Restamos los valores absolutos de los sumandos y ponemos el signo del sumando de mayor valor absoluto. $(-2) + (3) = 1$ $\quad$ $(5) + (-2) = 3$ 
Suma de diversos números enteros	
Primer procedimiento	**Segundo procedimiento**
• Efectuamos las sumas en el orden en que aparecen. $(-4) + (6) + (5) + (-8) =$ $= (2) + (5) + (-8) =$ $= (7) + (-8) = -1$	• Sumamos los números enteros positivos. $(6) + (5) = 11$ • Sumamos los números enteros negativos. $(-4) + (-8) = -12$ • Sumamos los dos resultados obtenidos. $(11) + (-12) = -1$

Propiedades de la suma de números enteros

- **Conmutativa**: Si cambiamos el orden de los sumandos, el resultado no varían
  a + b = b + a. $\quad$ (-8) + 3 = 3 + (- 8)
- **Asociativa**: En una suma de varios sumandos, el resultado no depende de cómo agrupemos los términos: *(a + b) + c = a + (b + c).*

  [(+ 3)+(-4)]+(-2)=(+ 3)+[(-4)+(-2)]
- **Elemento neutro**: El 0 es el elemento neutro de la suma, porque, al sumar 0 a cualquier número entero, obtenemos dicho número:

  a + 0 = 0 + a = a.
  (- 13)+ 0 = 0 + (-13) = -13
- **Elemento opuesto**: El opuesto de un número entero es el número entero que sumado a él da 0: *a + op(a) = 0.*
  (- 7)+ (+7) = 0

Trabajo individual

5. Calcula.

   a. (-7) + (-9) + (-3)

   b. (-14) + (8) + (5)

   c. (23) + (-17)

   d. (-9) + (-16)

6. Calcula estas sumas de dos formas distintas.

   a. 3 + (-7) + 12 + (-8) + 4

   b. -6 + 25 + (-14) + (-7) + 4 + (-3)

7. Agrupa para sumar.

   -5 +8 +(-2)

1.3.2. Sustracción o resta

Para obtener el opuesto de un número entero basta con cambiarle el signo.

La existencia del elemento opuesto nos permite definir la resta de dos números enteros en una suma.

Fíjate en esta resta de números enteros:

$$(3) - (-7) = 10$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$(3) - (-7) = 3 + \text{op}(-7) = (3) + (7) = 10$$

También podemos obtener opuestos de una expresión cuando existe un signo menos enteramente fuera de un paréntesis:

$$-((12) + (-7)) = -(5) = \text{op}\ (5) = -5$$

Los paréntesis nos indican, en el caso de signos, a qué términos debemos aplicar la operación del opuesto.

Simplificación de la escritura

Podemos evitar el uso de paréntesis innecesarios en las operaciones de números enteros:

- Identificamos cada número entero positivo con un número natural y lo escribimos prescindiendo del signo y del paréntesis si no es necesario.

$$(4) = +4 = 4$$

- A partir de la definición de la resta, podemos simplificar la escritura de las operaciones con números enteros negativos.

$$(8) + (-2) = (8) - (2) = 8 - 2$$

Al trabajar con números enteros, el signo - puede tener dos significados diferentes:

$$(+5) - (-2)$$

Indica la operación resta.

Indica un número entero negativo.

Simplificación de la escritura en sumas y restas

- $(+6) + (+2) = 6 + 2$
- $(+6) + (-2) = 6 - 2$
- $(-6) + (+2) = -6 + 2$
- $(-6) + (-2) = -6 - 2$
- $(+6) - (+2) = 6 - 2$
- $(+6) - (-2) = 6 + 2$
- $(-6) - (+2) = -6 - 2$
- $(-6) - (-2) = -6 + 2$

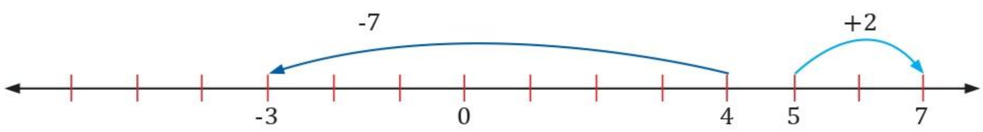
Resta de dos números enteros

- Sumamos al primero el opuesto del segundo.

$$(a) - (b) = (a) + \text{op}\ (b)$$

$$(4) - (7) = (4) + (-7)$$

$$(5) - (-2) = (5) + (2)$$



1.3.3. Multiplicación y división

Multiplicación

Según el lenguaje matemático, el signo (x) de la multiplicación puede sustituirse por el signo (.).

Multiplicamos los valores absolutos de los factores y ponemos el signo dado por la regla de los signos que se muestra a continuación.

·	+	-
+	+	-
-	-	+

Observa que, al aplicar la regla de los signos, el signo del producto es positivo si los dos factores tienen el mismo signo; y negativo si tienen distinto signo.

Propiedades de la multiplicación de números enteros

Dados cuatro números a, b, c y d

- **Conmutativa**: Si cambiamos el orden de los factores, el resultado no varía:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$
$$-4 \cdot 2 = 2 \cdot -4$$
$$-8 = -8$$

- **Asociativa**: En un producto de diversos factores, el resultado no depende de cómo los agrupemos:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
$$(-6 \cdot 7) \cdot 3 = -6 \cdot (7 \cdot 3)$$
$$-126 = -126$$

- **Elemento unidad**: El 1 es el elemento unidad de la multiplicación, porque, al multiplicar cualquier número entero por 1, obtenemos el mismo número:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$
$$-9 \cdot 1 = 1 \cdot -9$$
$$-9 = -9$$

- Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma: Esta propiedad nos permite sacar factor común:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (b + c + d)$$

$$-15 + 20 + 5 = 5 \cdot (-3 + 4 + 1) = 5 \cdot (2) = 10$$

División

Dividimos sus valores absolutos y escribimos el signo dado por la regla de signos mostrada a continuación:

:	+	-
+	+	-
-	-	+

Observa que el cociente es positivo si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo, y negativo si el dividendo y el divisor tienen signos distintos.

Trabajo individual

8. Calcula estas sumas de dos formas distintas.
   a. 3 + (-7) + 12 + (-8) + 4
   b. (-6) + 25 + (-14) + (-7) + 4 + (-3)
9. Simplifica la escritura y calcula estas restas.
   a. (9) - (12)
   b. (-25) - (-25)
   c. (95) - (-22)
   d. (12) - (34)
10. Saca el factor común y calcula.
    a. (-6) · (-4) + (-4) · 5 - 9 · (-4)
    b. 5 · (-7) - 5 · (-3) - 8 · 5
11. Calcula.
    a. (4) × (2) × (-9)
    b. (-4) × (1) × 0
    c. (-3) × (4) × (-7)
    d. (3) × (-5) × (2)
12. Calcula.
    a. (-205) : (-5)
    b. 135 : (-9)
    c. (-63) : (-7)

2. Potenciación y radicación con números enteros

2.1. Potencia con números enteros y exponentes naturales

D.C.D. M.4.1.5. Calcular la potencia de números enteros con exponentes naturales en asociación con áreas y volúmenes en el caso de exponente 2 y 3.

Potencias de base entera y exponente natural

En ocasiones, encontramos multiplicaciones cuyos factores se repiten. Estos productos de factores iguales se llaman *potencias*.

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

En esta ocaciión trabajaremos con una potencia está formada por la base *a* (número entero) y un exponente *n* (número natural). Esta operación consiste en la multiplicación de la base *a* por ella misma, las veces que indique el exponente *n*.

$$\text{base} \text{—} a^{n} \text{—exponente} \qquad 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

Una potencia de exponente 1 es igual a la base de esta potencia.

$$a^1 = a$$

Para obtener el signo de una potencia, seguimos estas reglas:

- Si el exponente es par, la potencia es siempre positiva.

  $3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \qquad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

- Si el exponente es impar, la potencia tiene el mismo signo que la base.

  $$3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$
  $$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

		Exponente	
		Par	Impar
Base	+	+	+
	-	+	-

Las potencias de exponente 2 se leen "elevadas al cuadrado" por su relación con un cuadrado. El área A de un cuadrado se calcula multiplicando lado por lado

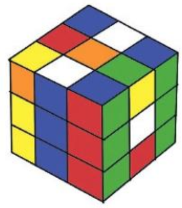
$$A = l \,.\, l = l^2$$

Por lo tanto se puede decir que el área, A de un cuadrado es igual a una potencia de exponente 2 y de base su lado l

En la primera potencia de exponente 2 se puede interpretar geométricamente como el área de un cuadrado de lado igual a la base de la potencia.

Las potencias de exponente 3 se leen "elevadas al cubo". En geometría en un cubo, los lados de cada cuadrado son comunes a dos caras y se llaman aristas (a) y son todas iguales

El volumen (V) de un cubo se obtiene multiplicando la arista de su largo por a la de su ancho y por la de su alto, y como todas son iguales, se obtiene que:



$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Operaciones con potencias

Para operar con potencias de base entera y exponente natural, procedemos igual que en el caso de potencias de base natural.

- Multiplicación de potencias de la misma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

  $$(-4)^2 \cdot (-4)^3 = (-4)^{2+3} = (-4)^5$$

- División de potencias de la misma base:

  $$a^m : a^n = a^{m-n},\ m > n$$
  $$6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$$

- Potencia de un producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

  $$(-3 \cdot 5)^4 = (-3)^4 \cdot 5^4$$

- Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

  $$[(-7)^3]^2 = (-7)^{3 \cdot 2} = (-7)^6$$

- Potencia con exponente negativo: $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

  $$(-7)^{-2} = \left(\frac{1}{-7^2}\right) = \frac{1}{49}$$

Potencias de 10

Las potencias de 10 son útiles porque simplifican la escritura.

A cualquier número entero seguido de ceros lo podemos expresar como el producto de este número por una potencia de 10 de exponente positivo.

$$-90\,000 = -9 \cdot 10\,000 = -9 \cdot 10^4$$

A cualquier número decimal con parte entera nula lo podemos expresar como el producto de sus cifras decimales diferentes de 0 por una potencia de 10 de exponente negativo.

$$0,000\,000\,4 = \frac{4}{10\,000\,000} = \frac{4}{10^7} =$$

$$= 4 \bullet \frac{1}{10^7} = 4 \bullet 10^{-7}$$

A las potencias de 10 también las empleamos para expresar las diversas equivalencias de los prefijos del sistema internacional (como se muestra en la tabla).

$$1 \text{ kilómetro (km)} = 10^3 \text{ m}$$

$$1 \text{ decilitro } (\text{d}\,\ell) = 10^{-1}\,\ell$$

$$1 \text{ nanómetro (nm)} = 10^{-9} \text{ m}$$

Para transformar las unidades, es necesario aplicar los factores de conversión correspondientes.

Prefijo (símbolo)		Equivalencias en unidades
tera-	(T)	10^{12}
giga-	(G)	10^{9}
mega-	(M)	10^{6}
kilo-	(k)	10^{3}
hecto-	(h)	10^{2}
deca-	(da)	10^{1}
deci-	(d)	10^{-1}
centi-	(c)	10^{-2}
mili-	(m)	10^{-3}
micro-	(μ)	10^{-6}
nano-	(n)	10^{-9}
pico-	(p)	10^{-12}
femto-	(f)	10^{-15}
atto-	(a)	10^{-18}

Ejemplo 9

a. ¿Cuántos centímetros son quince nanómetros?

Como 1 nm = 10^{-9} m y 1 cm = 10^{-2} m, podemos escribir estas equivalencias como factores de conversión para obtener centímetros.

$$15\text{nm} = 15\text{nm} \cdot \frac{10^{-9}\text{ m}}{1 \text{ nm}} \cdot \frac{1 \text{ cm}}{10^{-2}\text{m}} = 15 \cdot 10^{-7}\text{cm}$$

b. ¿Cuántos hectolitros son setenta mililitros?

Como 1 mℓ = 10^{-3} ℓ y 1 hℓ = 10^2 ℓ, podemos escribir estas equivalencias como factores de conversión para obtener hectolitros.

$$70\text{ m}\ell \cdot \frac{10^{-3}\,\ell}{1\text{ m}\ell} \cdot \frac{1\text{ h}\ell}{10^2\,\ell} = 70 \cdot 10^{-5}\text{h}\ell = 7 \cdot 10^{-4}\text{h}\ell$$

Así, 15 nm son $15 \cdot 10^{-7}$ cm y 70 mℓ son $7 \cdot 10^{-4}$ hℓ.

Trabajo individual

14. Escribe, en forma de potencias, estas multiplicaciones e indica la base y el exponente de cada una.

a. $-2 \cdot (-2) \cdot (-2)$

b. $-5 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

15. Indica el signo de estos ejercicios.

a. $(-4)^7$

b. $(-2)^{12}$

c. $(6)^5$

d. $(-7)^{21}$

e. $(-4)^{32}$

UNIDAD 2

CONTENIDO:

- •Propiedades de los números racionales
- •Suma y resta
- •Multiplicación- División
- •Operaciones combinadas

2. Propiedades de los números racionales

D.C.D. M.4.1. 16, 17. Operar en Q (adición y multiplicación) y aplicar sus propiedades en la solución de ejercicios numéricos y problemas que requieran el uso de números fraccionarios.

En este apartado estudiaremos la suma y la resta de fracciones con igual o distinto denominador, la multiplicación y la división con fracciones.

2.1. Suma y resta

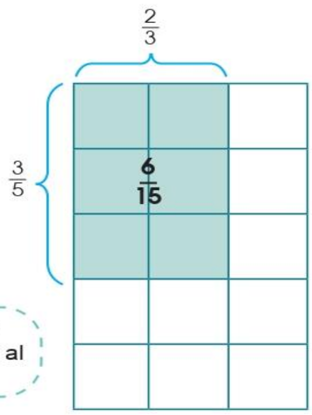
Fracciones con el mismo denominador	Fracciones con distinto denominador
• Dejamos el mismo denominador. • Sumamos o restamos los numeradores. Ejemplo: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4+1}{9} = \frac{5}{9}$ $\frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{7-3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	• Reducimos las fracciones a común denominador. • Sumamos o restamos las fracciones obtenidas. Ejemplo: $\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{4 + 18 - 15}{24} = \frac{7}{24}$ m.c.m. (6, 4, 8) = 24 24 : 6 = 4 24 : 4 = 6 24 : 8 = 3 $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$ $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$

2.2. Multiplicación

Multiplicación de fracciones

Veamos cómo multiplican fracciones a partir del cálculo del área del rectángulo coloreado cuyas longitudes están expresadas como fracciones de una unidad de medida.

Área = base x altura: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$



El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores y cuyo denominador es igual al producto de los denominadores.

Multiplicación de un número entero por una fracción

Para multiplicar un número entero por una fracción hay que tener en cuenta que los números enteros son fracciones de denominador 1.

$$-3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{-3}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot (-3)}{8 \cdot 1} = \frac{-15}{8} \qquad 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3}$$

Para multiplicar un número por una fracción, multiplicamos ese número por el numerador de la fracción y dejamos el mismo denominador.

2. Propiedades de los números racionales

D.C.D. M.4.1. 16, 17. Operar en Q (adición y multiplicación) y aplicar sus propiedades en la solución de ejercicios numéricos y problemas que requieran el uso de números fraccionarios.

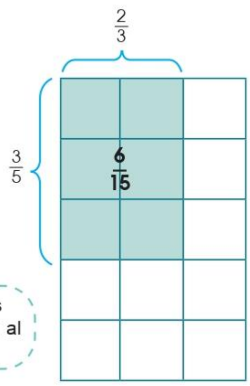
En este apartado estudiaremos la suma y la resta de fracciones con igual o distinto denominador, la multiplicación y la división con fracciones.

2.1. Suma y resta

Fracciones con el mismo denominador	Fracciones con distinto denominador
• Dejamos el mismo denominador. • Sumamos o restamos los numeradores. Ejemplo: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4+1}{9} = \frac{5}{9}$ $\frac{7}{6} - \frac{3}{6} = \frac{7-3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	• Reducimos las fracciones a común denominador. • Sumamos o restamos las fracciones obtenidas. Ejemplo: $\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{4 + 18 - 15}{24} = \frac{7}{24}$ m.c.m. (6, 4, 8) = 24 24 : 6 = 4 24 : 4 = 6 24 : 8 = 3 $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$ $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$

2.2. Multiplicación

Multiplicación de fracciones



Veamos cómo multiplican fracciones a partir del cálculo del área del rectángulo coloreado cuyas longitudes están expresadas como fracciones de una unidad de medida.

Área = base x altura: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores y cuyo denominador es igual al producto de los denominadores.

Multiplicación de un número entero por una fracción

Para multiplicar un número entero por una fracción hay que tener en cuenta que los números enteros son fracciones de denominador 1.

$$-3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{-3}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot (-3)}{8 \cdot 1} = \frac{-15}{8} \qquad 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3}$$

Para multiplicar un número por una fracción, multiplicamos ese número por el numerador de la fracción y dejamos el mismo denominador.

Fracción inversa

Al multiplicar dos fracciones puede ocurrir que el resultado sea 1.

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$$

En este caso, diremos que una fracción es la inversa de la otra.

Fijémonos en que, para obtener la fracción inversa de una fracción dada, basta intercambiar el numerador y el denominador.

Así, la fracción inversa de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$, la de $\frac{1}{6}$ es $\frac{6}{1} = 6$, la de 4 es $\frac{1}{4}$.

2.3. División

Fijémonos en esta división de números naturales.

48	÷	8	=	6
dividendo		divisor		cociente

Y comparémosla con esta multiplicación de fracciones.

$$48 \times \frac{1}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

Observemos que dividir dos números es lo mismo que multiplicar el dividendo por la fracción inversa del divisor.

Así, por ejemplo, para dividir $\frac{1}{9}$ entre $\frac{2}{3}$, multiplicamos $\frac{1}{9}$ por $\frac{3}{2}$.

$$\frac{1}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1 \times 3}{9 \times 2} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

Si queremos calcular una cantidad conociendo el valor de una fracción de la misma, multiplicamos ese valor por la inversa de la fracción.

$$\frac{3}{7} \text{ de } x = 12 \qquad x = 12 \cdot \frac{7}{3} = 28$$

Trabajo individual

1. Efectúe las siguientes operaciones y , si es posible, simplifique su resultado.

a. $\frac{2}{6} + \frac{1}{6}$	d. $\frac{4}{7} - \frac{1}{7}$	g. $\frac{-1}{5} + \frac{3}{10}$	j. $\frac{3}{2} - \frac{4}{5}$
b. $\frac{1}{5} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3}$	e. $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{7}{10}$	h. $\frac{5}{3} \cdot \frac{-6}{4}$	k. $\frac{-5}{12} \cdot \frac{3}{4}$
c. $\frac{11}{5} \cdot \frac{5}{11}$	f. $\frac{8}{3} \div \frac{5}{6}$	i. $\frac{3}{2} \div \frac{-4}{-9}$	l. $\frac{-4}{15} \div \frac{-6}{7}$

2.4. Operaciones combinadas

Para efectuar operaciones combinadas con fracciones positivas y negativas, aplicamos los mismos criterios de prioridad establecidos para los números enteros:

- Primero, resolvemos las expresiones dentro de paréntesis y corchetes.
- A continuación, realizamos las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen.
- Y, finalmente, resolvemos las sumas y las restas.

Fíjate en este ejemplo.

Ejemplo 1

Calculemos $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{-2}{5} - \frac{2}{35}\right) \div \frac{4}{21}$.

- En primer lugar, efectuamos la resta del interior del paréntesis.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{-14 - 2}{35} \div \frac{4}{21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{-16}{35} \div \frac{4}{21}$$

- A continuación, resolvemos las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{-16}{35} \div \frac{4}{21} = \frac{10}{12} + \frac{-16}{35} \cdot \frac{21}{4} = \frac{10}{12} + \frac{-336}{140}$$

- Por último, calculamos las sumas y las restas, y simplificamos el resultado.

$$\frac{10}{12} + \frac{-336}{140} = \frac{350 + (-1008)}{420} = \frac{-658}{420} = \frac{-47}{30}$$

Estas expresiones son equivalentes para la división de fracciones.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Trabajo individual

1. Efectúe las siguientes operaciones combinadas.

   a. $\frac{-3}{7} - \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{6}$ b. $\frac{1}{7} \div \left(\frac{3}{-2}\right) + \frac{7}{8}$ c. $\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{-6}{4}\right) + \frac{3}{2} \div \frac{2}{3} - \left(\frac{-4}{9}\right)$

2. Calcule.

   a. $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \div \left(2 - \frac{3}{5}\right)$ b. $1 - 2 \cdot \frac{\frac{1}{4} - 1}{2 + \frac{1}{5}}$

3. Resuelva los siguientes problemas

   a. Raquel leyó en una semana la tercera parte de un libro de 180 páginas, y la semana siguiente, la cuarta parte. Si tarda tres minutos en leer una página, ¿cuánto tardará en acabar de leerlo? Expresa el resultado como una operación combinada y calcúlala.

   b. Adrián sale de su casa con 32 dólares. En diversas compras, se gasta tres octavas partes de esta cantidad. ¿Cuántos dólares se ha gastado? ¿Cuántos dólares le quedan?

UNIDAD 3

CONTENIDO:

- Ecuaciones simples
- Introducción a las ecuaciones de primer grado con una incógnita
- Aplicaciones de las ecuaciones de primer grado con una incógnita
- Introducción a los números racionales

8 octavo año

3. Ecuaciones simples

3.1. Introducción a las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

D.C.D. M.4.1. (8, 9) Expresar enunciados sim- ples, inmersos en problemas cotidianos en los que se desconoce uno o más va- lores, en lenguaje matemático y aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en la suma de monomios homogéneos y la multiplicación de términos algebrai- cos para resolver problemas cotidianos.

Lenguaje algebraico

Los diferentes tipos de números sirven para expresar cantidades; pero hay situaciones que no pueden expresarse únicamente con números. En estos casos, también empleamos letras.

Reglas de escritura del lenguaje algebraico

- Al signo × de la multiplicación lo podemos sustituir por el signo (·).

$$3 \times a \Rightarrow 3 \cdot a$$

- Cuando el signo de la multiplicación aparece entre letras o entre un número y una letra, acostumbramos a suprimir.

$$3 \cdot a \Rightarrow 3\,a$$

$$a \cdot b \cdot c \Rightarrow abc$$

- No escribimos el factor 1.

$$1a^2\,b \Rightarrow a^2b$$

- No escribimos el exponente 1.

$$a^2b^1 \Rightarrow a^2b$$

Expresiones algebraicas

Para expresar que la base de un rectángulo es el doble de su altura podemos escribir:

$$b = 2h$$

Donde b representa la base y h la altura del rectángulo.

Para expresar en lenguaje algebraico cualquier frase, debemos escoger la letra o las letras que vamos a usar y tener en cuenta las reglas de escritura.

Una expresión algebraica es una serie de números y letras relacionados por los signos de las operaciones aritméticas.

En el ejemplo anterior, si queremos conocer la base de un rectángulo de tres unidades de altura, basta con sustituir h por 3 en la expresión algebraica y efectuar el cálculo.

$$b = 2\,h \xrightarrow{h = 3} b = 2 \cdot 3 = 6$$

El valor numérico de la expresión algebraica $b = 2h$, para $h = 3$, es 6.

El valor numérico de una expresión algebraica es el número obtenido al sustituir las letras por números y efectuar las operaciones indicadas.

Por ejemplo, la expresión algebraica 3h - 7, tiene distintos valores numéricos para distintos valores de *h*.

Valor de h	Valor numérico
1	$3(1) - 7 = 3 - 7 = -4$
5	$3(5) - 7 = 15 - 7 = 8$
-2	$3(-2) - 7 = -6 - 7 = -13$

Trabajo individual

21. Escribe en lenguaje algebraico estas expresiones.
    - La mitad de un número.
    - Al doble de un número añadirle cinco unidades.
    - La suma de un número y su opuesto.
    - La diferencia de un número y el triple del mismo.

Monomios

Un *monomio* es una expresión en la cual las únicas operaciones entre los factores son multiplicaciones o potencias de exponente con número entero positivo. Siguiendo estas reglas, lo monomios pueden ser tan pequeños o tan grandes como deseemos.

$$x,\ ha^{234412},\quad abcd^2,\ efghi^3,\ jklmno^4,\ pqrstuv^4,\ wxyz$$

Todos son ejemplos de monomios.

Coeficiente

Llamamos *coeficiente* al número o los números que aparecen en un monomio y multiplican a todos los demás términos.

$$3x \qquad 7abc^2 \qquad 9n6m$$

No es usual escribir un monomio con números en el medio; por esta razón, al último término lo escribiremos de esta manera:

$$9n6m = 9 \cdot 6nm = 54nm$$

Parte literal

La parte literal de un monomio es aquella que contiene todas las letras que representan las variables.

Grado

El grado de un monomio está dado por la suma de todos los exponentes de sus variables. Es importante recordar que, si una variable no tiene su exponente, su exponente es 1.

Monomio	Grado
$x^2 y^2 z$	$2+2+1=5$
$x^7 yzw^3$	$7+1+1+3=12$
x	1

Como ya hemos visto, dos monomios son semejantes si es que tienen la misma parte literal (variables), además los podemos agrupar y, de esta manera, resolver operaciones más complejas.

Algunas operaciones con monomios semejantes:

$ax^n + bx^n$	$(a+b)x^n$
$ax^n - bx^n$	$(a-b)x^n$

Multiplicación de monomios por números

Para multiplicar un monomio por un número, multiplicamos el coeficiente del monomio por el número.

Es importante recordar que, entre las variables y números de un monomio, existe una multiplicación imaginaria y, por este motivo, no aplicamos la regla de distribución para la multiplicación.

$$5(2ab) = 10ab \neq 5 \cdot 2a \cdot 5 \cdot b$$

Si un monomio no tiene un coeficiente, entonces el coeficiente del monomio es 1.

Trabajo colaborativo

6. Junto con un compañero resuelva los siguientes ejercicios
   a. Determinen las partes de las siguientes expresiones.
      $x - 4y + 2x - 3$
      $5m + 3n - 2$
   b. Escriban dos monomios de grado 1, dos de grado 2 y dos de grado 3 utilizando x, y, z

3.2. Aplicaciones de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

D.C.D. Plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita de manera analítica, comprendiendo que se puede expresar en lenguaje matemático situaciones cotidianas Ref (D.C.D. M.4.1. (10, 11 ,12))

3.2.1. Suma y resta

Simplificar una expresión algebraica

Simplificar una expresión algebraica consiste en agrupar los términos semejantes y operar con ellos.

En las expresiones algebraicas, solo podemos sumar y restar los términos semejantes. Observa el procedimiento.

- Si todos los términos son semejantes.

$$3x + 2x$$

Sumamos o restamos los coeficientes y dejamos la misma parte literal.

$$3x + 2x = (3 + 2)x = 5x$$

$$3x + 2x = 5x$$

- Si no son semejantes todos los términos.

$$2xy + 3x^2 + 3xy - x^2 + 4y =$$
$$= (2xy + 3xy) + (3x^2 - x^2) + 4y$$
$$= 5xy + 2x^2 + 4y$$

Reducir términos semejantes

Es cuando en una expresión algebraica sumamos o restamos los términos semejantes, obtenemos una expresión algebraica más sencilla.

$$2a + 3b + 3a - b = 5a + 2b$$

Es importante recordar que:

$$3xy^2 \neq 3\,(xy)^2$$

En la primera expresión el exponente afecta unicamente al literal sobre el que se encuentra, cuando sumamos paréntesis el exponente afecta a todo lo que se encuentra dentro del mismo tal como se observa en la segunda expresión.

3.2.2. Multiplicación

Siempre podemos efectuar la multiplicación de los términos de dos expresiones algebraicas, aunque dichos términos no sean semejantes.

Observa este ejemplo:

$$3a \cdot 5a^2b$$

Multiplicamos por un lado los coeficientes y, por el otro lado, las partes literales, teniendo en cuenta las propiedades de la multiplicación de potencias.

$$\boxed{3}\,\boxed{a} \cdot \boxed{5}\,\boxed{a^2}\,b = \boxed{15}\,\boxed{a^3}\,b$$

$$3\,a \cdot 5\,a^2\,b = 15\,a^3\,b$$

Las operaciones algebraicas cumplen con la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y la resta.

Podemos reordenar la parte literal de un término, dado a que entre cada letra o número existe una multiplicación.

$$3xy^2 = 3 \cdot x \cdot y^2 = 3y^2\,x$$

También es importante recordar que:

$$3xy^2 \neq 3(xy)^2$$

El cuadrado afecta únicamente al literal sobre el que se encuentre, a menos de que esté afuera de un paréntesis; en cuyo caso afecta a todo el término que se encuentra dentro del paréntesis.

Esto es importante al agrupar términos semejantes.

$3xy^2$ $\quad -5y^2\,x$ $\quad -3x^2\,y$ $\quad 5yx^2$

Aunque se vean similares, no a todos los términos anteriores los podemos agrupar entre sí. Observa lo que pasa cuando reordenamos los términos:

$$-5y^2\,x = -5xy^2$$

$$5x^2\,y = 5yx^2$$

Una vez hecho esto vemos que los siguientes términos son semejantes, debido a que las expresiones del mismo color son equivalentes.

$3xy^2$ $\quad$ $-5y^2x$

$-3x^2y$ $\quad$ $5yx^2$

Pero no es lo mismo decir y^2x que x^2y, así que a los términos azules y los magenta no los podemos agrupar.

Esto sucede de la misma manera con tres o más términos.

$$x^3y^2z = zx^3y^2 = y^2zx^3 = zy^2x^3 = x^3zy^2 = y^2x^3z$$

Pero ninguno de los siguientes términos es equivalente a los anteriores ni entre sí:

$$x^3zy \quad xy^3z \quad y^3zx^2 \quad x^3yz^2 \quad z^3yx^2 \quad z^3xy^2$$

Dicha propiedad permite transformar multiplicaciones en sumas o restas de multiplicaciones.

Observa estos ejemplos:

$$5a(b+1) = 5ab + 5a$$

$$4a(a - 3b) = 4a^2 - 12ab$$

Esta propiedad también nos permite realizar el proceso inverso; es decir, sacar el factor común. Esto lo hacemos de esta manera:

$$7a - 3ab = a(7 - 3b)$$

$$2a + 5a^2b = 2a + 5a \cdot ab = a(2 + 5ab)$$

Recuerda que resolver expresiones algebraicas con incógnitas (*x*, *y*, etc.) es lo mismo que resolverlas con números, la única diferencia es que la respuesta no es un número sino una expresión.

a. $5(3+5) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 15 + 25 = 40$

b. $5(3+x) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot x = 15 + 5x$

c. $5(y+x) = 5 \cdot y + 5 \cdot x = 5y + 5x$

Nota: En la expresión *c*, obtenemos lo mismo que en la *a*, sacando el valor numérico con valores de y=3 y x=5.

Una expresión con incógnitas puede verse como una generalización de una operación con números.

Decir la primera expresión en palabras sería de esta manera: «Tomamos los números tres y cinco, los sumamos y, luego, multiplicamos la respuesta por cinco». Por otro lado, la tercera expresión en palabras sería: «Tomamos cualquier par de números *x* e *y*, los sumamos y luego multiplicamos la respuesta por cinco».

Podríamos generalizar esta operación aún más:

$$z(x+y) = z \cdot y + z \cdot x = zy + zx$$

Del mismo modo, si tenemos la parte derecha de la expresión anterior, podemos tomar z como factor común y llegar a la expresión de la izquierda.

$$zy + zx = z(y+x)$$

Recuerda que las expresiones que se detallan a continuación son equivalentes, por las reglas de los exponentes:

$$x^2 - y^3 - z^{-1} + w^{-3} = x \cdot x - y \cdot y \cdot y - \frac{1}{z} + \frac{1}{w^3}$$

Ejemplo 11

Apliquemos la propiedad distributiva y calculemos el valor numérico del siguiente producto: $3a(4a - 5b)$, si $a = -1$ y $b = 3$.

a. Aplicamos la propiedad distributiva.

$$3a(4a - 5b) = 12a^2 - 15ab$$

b. Sustituimos la letra a por −1 y la letra b por 3.

$$12a^2 - 15ab = 12(-1)^2 - 15(-1)(3)$$
$$= 12 + 45 = 57$$

Trabajo individual

22. Obtén el factor común de las siguientes expresiones.

a. $43x - 3xy + x^2$ $\quad$ b. $7ab + 33by + b$

23. Completa la siguiente ecuación para que tenga solución si x = -7:

$8 + x = \ldots\ldots + 4$

Casos de la multiplicación

Factores con potencias negativas

De la misma manera que a^2 significa $a \cdot a$, a^{-1}, significa $1 \div (a^1)$ o, utilizando fracciones,

$$\frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}; a \neq 0$$

Las potencias negativas son equivalentes a uno sobre su contraparte positiva.

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}; x \neq 0$$

Si el término está multiplicado por un número, este se mantiene y multiplica a toda la fracción:

$$3x^{-3} = 3 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{3}{x^3}$$

$$\frac{1}{3}x^{-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{3x^3}$$

Un error común es llevar al término con potencia negativa a la parte inferior de la fracción junto con el número que lo multiplica:

$$3x^{-3} \neq \frac{1}{3x^3}$$

Esto es un error del que debemos tener cuidado, pues cambia completamente la expresión.

De la misma manera que podemos sacar potencias positivas de factor común, podemos utilizar potencias negativas.

$z^2y + z^3x = z \cdot z \cdot y + z \cdot x = z^2y + z^2zx = z^2(y + zx)$

$z^{-2}y + z^{-3}x = z^{-2}y + z^{-2}z^{-1}x = z^{-2}(y + z^{-1}x)$

Trabajo individual

1. Generaliza numéricamente y con palabras la expresión $5 + 4(3) = 17$.

____

____

____

____

2. Saca el factor común en la siguiente expresión algebraica:

$2xy - 4x + 2x2y =$,

____

____

3. Escribe tres operaciones de suma, resta y multiplicación de monomios, de tal manera que se obtenga el resultado propuesto (la operación debe tener tres términos).

a. $7xy^3 =$

b. $5mn^2 =$

c. $-8ab^3c^2 =$

4. Resuelve estos ejercicios:

a. $3x + x$, si $x = 4$

b. $4m + 3m - 8$, si $m = -2$

c. $5x + 4y - 5$, si $x = 7$, $y = 6$

5. Obtén el factor común con potencia negativa.

a. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 5x^{-3}$;$x \neq 0$

b. $\frac{12}{b} + \frac{a}{b^5} - 2b^{-2}$;$b \neq 0$

6. Completa:

a) $49x^2 + 7x^3 = 7x^2 \cdot (7 + ...)$

b) $a2b - 6a^2b^2 = a^2b \cdot (..... - .....)$

c) $27a^3b^3 + 9a^4b - 81a^4b^2 + 21a^3b^7 =$

$= 3a^3b \cdot (..... + ... - ...... + ...)$

Trabajo colaborativo

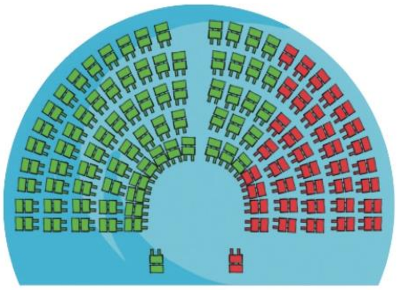
Formen parejas y planteen tres ecuaciones con paréntesis. Resuelvan y expongan la Respuesta paso a paso.

3.3. Introducción a los números racionales.

D.C.D. M.4.1. (13, 14) Reconocer el conjunto de los números racionales Q, identificar sus elementos y representarlos como un número decimal y/o como fracción en relación con expresiones cotidianas que requieren el uso de estos números.

Fracciones

Las fracciones se utilizan habitualmente para representar partes de una unidad. Así, cuando decimos que las dos terceras partes de los asambleístas han votado a favor de una ley, y los dividimos en tres grupos iguales, dos de estos grupos habrían votado a favor de la ley y, matemáticamente, lo representaríamos con la expresión $\frac{2}{3}$.



Un número fraccionario, o fracción, es el cociente de dos números enteros (*a* y *b*) que se representa de la siguiente forma:

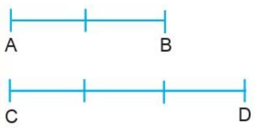
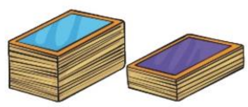
$$\frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{numerador} \\ \longrightarrow \text{denominador} \end{array}$$

- El denominador indica el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad.
- El numerador expresa las partes que hemos tomado.

Una fracción puede expresarse como el cociente de los dos números que la conforman. Si dividimos los números, usualmente obtenemos un número decimal.

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Una fracción puede interpretarse de varias formas:

Fracción como división entre dos enteros	Fracción como razón de medida	Fracción como operador
 Para envasar 3 kg de arroz en 5 costales efectuamos la división 3 : 5. $3 : 5 = \frac{3}{5} = 0{,}6$ kg	 La longitud del segmento de AB es $\frac{2}{3}$ de la longitud del segmento CD.	 Para calcular las $\frac{2}{5}$ partes de 125 cromos, multiplicamos la fracción por 125. $\frac{2}{5} \cdot 125 = 50$ cromos

Puesto que una fracción puede interpretarse como la expresión de una división entre dos números enteros, es evidente que podemos encontrar fracciones positivas y fracciones negativas.

Como en el caso de los números enteros, escribimos las fracciones positivas sin indicar su signo.

$$+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

Y, teniendo en cuenta la regla de los signos para la división, podemos escribir:

$$\frac{3}{4}=\frac{-3}{-4}$$

Vemos, pues, que toda fracción positiva puede expresarse como el cociente de dos números enteros, ambos positivos o ambos negativos.

Y, del mismo modo, toda fracción negativa puede expresarse como el cociente de dos números enteros, uno de ellos positivo y el otro negativo.

$$\frac{-5}{4}=\frac{5}{-8}=-\frac{5}{8}$$

Clasificación

Fíjate cómo clasificamos las fracciones al compararlas con la unidad. $\boxed{\frac{a}{b}}$

Fracciones propias

Tienen el numerador menor que el denominador (a < b). Son fracciones menores que la unidad.

$\frac{2}{5} \longrightarrow$ 

$2<5 \longrightarrow \frac{2}{5}<1$

Fracciones impropias

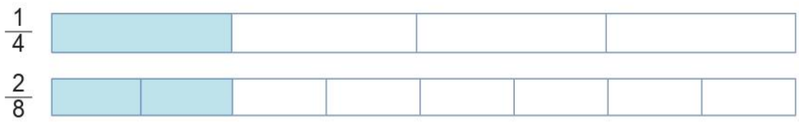
Tienen el numerador mayor que el denominador (a > b). Son fracciones mayores que la unidad.

$\frac{7}{5} \longrightarrow$ 

$7>5 \longrightarrow \frac{7}{5} \longrightarrow 1 \text{ unidad} + \frac{2}{5} = 1\frac{2}{5}$

Fracciones equivalentes

Para saber si dos fracciones distintas, por ejemplo $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$, representan la misma parte de la unidad, podemos compararlas graficamente.



$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$$

> A las fracciones que representan la misma parte de la unidad, las denominamos *fracciones equivalentes*.

Si dos fracciones positivas son equivalentes, se cumple que el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8} \longrightarrow 1\cdot 8=4\cdot 2$$

A esta propiedad la conocemos como *propiedad fundamental de las fracciones equivalentes*, y nos permite definir la equivalencia de fracciones con signo.

UNIDAD 4

CONTENIDO:

- Introducción a la estadística
- Organización y representación de datos estadísticos
- Representación de datos estadísticos por medio de las TIC
- Estadística usando programas informáticos

8 octavo año

1. Introducción a la estadística

1.1. Organización y representación de datos estadísticos

D.C.D. M.4.3.1. Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para definir la función asociada y representarlos gráficamente con ayuda de las TIC.

Estadística

Muchas veces es interesante conocer algunas características o el comportamiento de un colectivo en cuestiones tan diversas, por ejemplo:

A. El color preferido de los estudiantes de una clase.

B. El número de goles marcados por cada uno de los equipos de fútbol de primera división en la última jornada.

C. La estatura del estudiantado de noveno de Básica de una ciudad.

En estos casos, hemos de recoger datos, organizarlos adecuadamente y analizarlos para extraer conclusiones. Ya sabes que a este tipo de estudio lo denominamos *estudio estadístico*.

Para el estudio estadístico de una situación tenemos que definir, en primer lugar, estos conceptos: *población*, *individuo*, *muestra*, *variable estadística* y *dato*.

La población de un estudio estadístico es el conjunto de elementos objeto del estudio. Cada uno de los elementos de la población es un individuo.

En ocasiones, no podemos tratar toda la población porque es demasiado grande, porque no disponemos de tiempo ni de recursos para hacerlo, o por otros motivos. En estos casos, solo podemos estudiar una parte de la población.

Normalmente, estudiamos una muestra, porque la población es muy grande o porque es muy costoso estudiar la población entera.
Dado que las conclusiones que extraemos de un estudio estadístico se extrapolan a toda la población, hemos de prestar mucha atención a la hora de seleccionar la muestra.

Una muestra es una parte de la población sobre la que se lleva a cabo el estudio.

La propiedad o característica concreta de la población que se quiere estudiar recibe el nombre de *variable estadística*. Cada valor que toma la variable estadística es un dato.

Estudio estadístico	Población	Variable estadística
A	Todos los estudiantes de una clase	Color preferido
B	Equipos de fútbol de primera división	Número de goles marcados en la última jornada
C	Estudiantado de una ciudad	Estatura

Existe un proceso a seguir para resolver problemas estadísticos:

- Describir claramente el problema.
- Identificar factores que pueden afectar el problema o solucionarlo.
- Proponer un modelo para el problema.
- Realizar experimentos.
- Refinar el modelo basándose en los datos encontrados.
- Realizar un nuevo experimento para hallar una solución al problema.
- Sacar conclusiones.

Recogida de datos

En un estudio estadístico nos interesa conocer el valor que toma la variable estadística en los diferentes individuos que componen la muestra de la población.

Ramas de la estadística

La estadística se divide en dos importantes ramas:

- La estadística descriptiva, que se ocupa únicamente de organizar los datos obtenidos en un estudio estadístico.
- La estadística inferencial, cuya finalidad es extraer conclusiones fiables sobre una población a partir de los datos recogidos en un estudio estadístico.

En esta unidad solo nos ocuparemos de la estadística descriptiva.

En ocasiones, para obtenerlos, basta con fijarse en cómo es o cómo se comporta cada individuo; otras veces es necesario hacer mediciones o experimentos científicos. También es frecuente realizar encuestas.

Una encuesta es un conjunto de preguntas dirigidas a una muestra significativa con la finalidad de obtener datos para un estudio estadístico.

http://goo.gl/bG2xPp

Si llevamos a cabo una encuesta, conviene tener presente que:

- Debe realizarse en un momento adecuado para que la persona encuestada se sienta cómoda y sea sincera.
- Las preguntas deberán ser breves y claras, y deben reducirse a las mínimas para obtener la información necesaria.
- Las preguntas no deben mostrar la opinión del encuestador.
- Es preferible formular preguntas con un número limitado de respuestas posibles que dejar opinar libremente al encuestado. En este caso, las encuestas son mucho más difíciles de tratar.

https://goo.gl/7d2Y14

Así, por ejemplo, al realizar una encuesta en una clase sobre la práctica de deporte, podemos plantear distintas preguntas:

- ¿Cuál es tu relación con el deporte? La pregunta puede tener demasiadas respuestas diferentes y puede ser muy complicado extraer alguna conclusión.
- ¿Cuántos días a la semana practicas deporte? Esta sencilla pregunta es más recomendable y tiene un abanico de respuestas más controlado.

Una forma sencilla de conseguir una muestra representativa consiste en escogerla al azar; por ejemplo, efectuando un sorteo entre todos los individuos de la población. En este caso, decimos que la muestra ha sido obtenida mediante un muestreo aleatorio.

Mundo Digital

La Estadística es una rama de la Matemática que surgió apenas el ser humano empezó a utilizar conceptos como el de un censo o el de los juegos de azar.

Investiga en libros e internet sobre la historia de las finanzas, puedes utilizar el siguiente enlace: https://goo.gl/c9aXgf.

Toma de muestras

No siempre es posible averiguar el valor que toma la variable estadística en todos y cada uno de los individuos de la población.

Cuando resulta inadecuado o dificultoso obtener información de toda la población, recogemos los datos correspondientes a una muestra representativa de dicha población.

Una manera sencilla de conseguir muestras representativas es elegirlas al azar. Esta técnica recibe el nombre de *muestreo aleatorio*. Así, para conocer la opinión de los habitantes de un país sobre cierta decisión política, seleccionaríamos una muestra formada por unos cuantos habitantes elegidos por sorteo en el censo.

http://goo.gl/wfNaAC

En cuanto al tamaño de la muestra, debe ser suficientemente grande para resultar representativa de la población, pero, a la vez, suficientemente pequeña para que sea posible manejarla.

Tablas estadísticas

Una vez recogidos los datos sobre los que basar un estudio estadístico, conviene organizarlos de forma que permitan obtener una primera impresión de la información que se tiene. Para ello, construimos las llamadas tablas estadísticas.

Desde la Matemática

Lenguaje matemático

Para representar la suma de N términos, utilizamos el símbolo sumatorio, Σ:

$$n_1 + n_2 + ... + n_N = \Sigma n_i$$

$$(i = 1, 2, ..., N)$$

Vamos a ilustrar el procedimiento con el estudio estadístico del número de hermanos que tienen los estudiantes de un determinado centro. De una muestra de veinte estudiantes, obtuvimos estos datos:

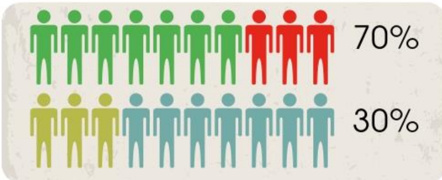
2, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 3, 1, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 3, 2, 0, 1, 0

A partir de esta serie de datos, construimos la tabla de distribución de frecuencias.

Fijémonos en que, en la primera columna, aparece el valor de la variable estadística, número de hermanos, y en la segunda columna, recuento, anotamos un pequeño segmento cada vez que aparece un dato de ese valor.

Realización de encuestas

Es conveniente formular preguntas de respuesta cerrada (a favor - en contra - no se define; mucho - regular - poco...), ya que ello facilita la clasificación de las respuestas.



http://www.freepik.es/

Cuando no resulta posible o adecuado obtener los datos de toda la población, recogemos los correspondientes a una muestra representativa de esta; es decir, una muestra que nos pueda dar una idea correcta de los valores de la variable en toda la población.

También es importante el número de elementos de la muestra: cuanto más grande sea, mejor representará toda la población, pero más difícil será obtener los datos (necesitaremos más tiempo, seguramente más dinero).

Además, en la tabla estadística, aparecen:

- **Frecuencia absoluta**: La frecuencia absoluta n_i de un valor de la variable estadística es el número de veces que se repite dicho valor. Así, la frecuencia absoluta del primer valor es $n_1 = 8$; la del segundo, $n_2 = 6$...

- **Frecuencia relativa**: La frecuencia relativa f_i de un valor de la variable estadística es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de dicho valor por el número total de datos, N. Así:

$$f_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{8}{20} = 0{,}4 \qquad f_2 = \frac{n_2}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}3$$

- **Frecuencia absoluta acumulada**: La frecuencia absoluta acumulada N_i de un valor de la variable estadística es el resultado de sumar a su frecuencia absoluta las frecuencias absolutas de los valores anteriores. Así:

N1 = 8; N2 = 8 + 6 = 14; N3 = 8 + 6 + 4 = 18...

- **Frecuencia relativa acumulada**: La frecuencia relativa acumulada F_i de un valor de la variable estadística es el resultado de sumar a su frecuencia relativa las frecuencias relativas de los valores anteriores. Así:

F1 = 0,4; F2 = 0,4 + 0,3 = 0,7; F3 = 0,4 + 0,3 + 0,2 = 0,9...

Ejemplo 1

En una clase de veintiún estudiantes se hace una encuesta sobre el número de hermanos:

Números hermanos	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0		8	$\frac{8}{21} = 0{,}381$
1		6	$\frac{6}{21} = 0{,}286$
2		4	$\frac{4}{21} = 0{,}190$
3		2	$\frac{2}{21} = 0{,}095$
5		1	$\frac{1}{21} = 0{,}018$
		21	$\frac{21}{21} = 1$

Números hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
0	8	8	0,381	0,381
1	6	14	0,286	0,667
2	4	18	0,190	0,857
3	2	20	0,095	0,952
5	1	21	0,048	1

En general, en todas las tablas estadísticas se cumple esto:

- La suma de todas las frecuencias absolutas, Σn_i, coincide con el número total de datos, N.
- La suma de todas las frecuencias relativas, Σf_i, es 1 (si expresamos en forma fraccionaria o decimal) o 100 (si expresamos en forma de porcentaje).
- La frecuencia absoluta acumulada del último valor coincide con el número total de datos, N.
- La frecuencia relativa acumulada del último valor es 1 (si expresamos en forma decimal) o 100 (si expresamos en forma de porcentaje).

Trabajo colaborativo

1. Realicen una encuesta similar en su clase y encuentren todas las frecuencias.
2. Las respuestas correctas dadas por los estudiantes de una clase en una prueba de Matemática compuesta por diez preguntas han sido: 6, 6, 7, 4, 5, 7, 3, 9, 7, 8, 5, 5, 3, 6, 4, 3, 5, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 5, 5, 6, 8, 4, 6 y 10.
   a. Elaboren una tabla de distribución de frecuencias y di cuántos estudiantes han contestado correctamente:
      - menos de cinco preguntas.
      - cinco o más preguntas.
      - ocho o más preguntas.
3. Elijan un comité de tres personas en tu clase y pidan que decidan entre los tres la comi- da favorita del curso. Después, elijan un comité de una manera diferente y pidan que decidan el color favorito de la clase. Finalmente, hagan una encuesta levantando manos para averiguar cuál es la respuesta correcta a ambas preguntas. ¿A qué comité le fue mejor? ¿Por qué?

Agrupación de datos

Cuando una serie de datos estadísticos contiene una gran cantidad de valores distintos que apenas se repiten, no resulta práctico empezar una tabla estadística anotando los diferentes valores de la variable, sino que, antes del recuento, agrupamos los datos en intervalos.

Utilizamos los intervalos siempre que se trate de una variable estadística cuantitativa continua, pues, en este caso, solemos tener muchos valores diferentes, o en el caso de una variable estadística cuantitativa discreta si existe una gran cantidad de valores distintos que apenas se repiten.

Consideremos las estaturas de veintiocho estudiantes de una clase expresadas en centímetros.

154 158 162 148 163 153 159 180 165 168

156 148 162 157 153 158 147 165 166 175

172 167 160 155 147 156 161 159

Puesto que hay gran número de valores distintos, los agruparemos en estos intervalos:

[146, 153), [153, 160), [160, 167),
[167, 174), [174, 181).

Hemos elegido intervalos semiabiertos por la derecha, de la misma amplitud y en los que se incluyen todos los datos de la serie. A estos intervalos los denominamos *intervalos de clase*.

Tomamos como representante de cada intervalo de clase su valor central. A este valor lo obtenemos sumando los dos extremos y dividiendo el resultado entre 2. Recibe el nombre de *marca de clase*.

Por ejemplo, la marca de clase del intervalo [146, 153) es:

$$\frac{146 + 153}{2} = 149{,}5.$$

Una vez realizada la elección de intervalos de clase, construimos la tabla estadística.

Estatura (cm)	Marca de clase	Recuento	n_i	f_i	N_i	F_i
[146, 153)	149,5		4	0,142 9	4	0,142 9
[153, 160)	156,5		11	0,392 9	15	0,535 8
[160, 167)	163,5		8	0,285 7	23	0,821 5
[167, 174)	170,5		3	0,107 1	26	0,928 6
[174, 181)	177,5		2	0,071 4	28	1
			$\Sigma n_i = 28$	$\Sigma f_i = 1$		

Trabajo individual

1. Las masas en gramos de 33 piezas producidas por una máquina son:

6,8; 6,5; 6,9; 7,0; 6,8; 6,7; 6,9; 6,4; 7,0; 7,1; 6,7;

6,6; 6,4; 6,7; 7,2; 6,8; 6,9; 6,9; 6,5; 7,0; 6,9; 6,7;

6,5; 6,8; 7,0; 6,8; 6,4; 6,9; 7,1; 7,0; 6,6; 6,6; 6,8

Agrupe estos datos en seis intervalos que vayan de 6,35 g a 7,25 g, y confeccione una tabla de distribución de frecuencias.

2. Se dispone de los siguientes datos de una encuesta realizada a veinticinco estudian- tes sobre su deporte favorito: la natación es el preferido por diez estudiantes; el 24% jue- ga fútbol; la frecuencia relativa de los que eligen el baloncesto es 0,16; hay estudiantes que seleccionaron el voleibol.

— Confeccioe una tabla con la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa y el porcen- taje de cada uno de los cuatro deportes.

1.2. Representación de datos estadísticos por medio de las TIC.

D.C.D. M.4.3.2. Organizar datos no agrupados (máximo veinte) y datos agrupados (máximo cincuenta) en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada, para analizar el significado de los datos para una compresión mayor de la información encontrada en varios medios.

Gráficos estadísticos

A la información contenida en las tablas estadísticas, la interpretamos con más facilidad si la representamos mediante gráficos estadísticos.

Si se trata de datos no agrupados, los gráficos más empleados son el diagrama de barras y el diagrama de sectores.

Diagrama de barras

Trazamos unos ejes de coordenadas y representamos en abscisas los valores de la variable y en ordenadas sus frecuencias.

Para cada valor de la variable, levantamos una barra vertical cuya altura sea el valor de su frecuencia.

Cuando las barras son sustituidas por dibujos representativos, al gráfico lo denominamos pictograma.

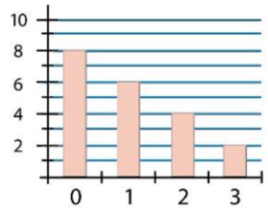


Diagrama de sectores

Consiste en un círculo dividido en sectores de amplitud proporcional a las frecuencias de cada valor de la variable.

Suele acompañarse del porcentaje que representa cada sector.

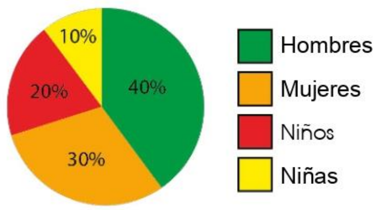
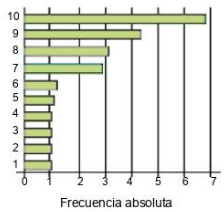


Diagrama de barras horizontales

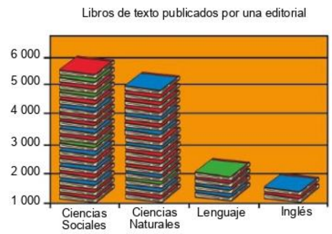
Se trata de un diagrama de barras, pero con la posición de los ejes intercambiada.

Es decir, representamos en abscisas la frecuencia y en ordenadas los valores de la variable.



Pictograma

En este gráfico hemos sustituido las barras por dibujos representativos de la variable estudiada.



Si se trata de datos agrupados en intervalos, el gráfico más utilizado es el histograma. Veamos cómo se representan mediante un histograma las frecuencias absolutas del estudio estadístico sobre las estaturas de veintiocho estudiantes.

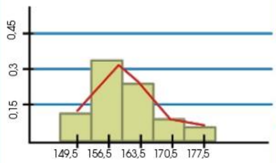
Estatura (cm)	Marca de clase	Recuento	n_i	f_i	N_i	F_i
(146, 153)	149,5		4	0,142 9	4	0,142 9
(153, 160)	156,5		11	0,392 9	15	0,535 8
(160, 167)	163,5		8	0,285 7	23	0,821 5
(167, 174)	170,5		3	0,107 1	26	0,928 6
(174, 181)	177,5		2	0,071 4	28	1
			$\Sigma n_i = 28$	$\Sigma f_i = 1$		

Histograma

Dibujamos unos ejes cartesianos. Sobre el eje de abscisas, representamos los intervalos de clase, uno a continuación del otro, y señalamos la marca de clase de cada uno. Sobre el eje de ordenadas, representamos las frecuencias absolutas.

Sobre cada intervalo de clase, construimos un rectángulo de base dicho intervalo y altura su frecuencia absoluta.

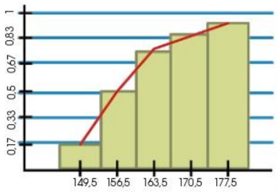
Observa que, al considerar intervalos de clase de igual amplitud, las áreas de los rectángulos son proporcionales a las frecuencias correspondientes.



En ocasiones, los histogramas aparecen acompañados de una línea poligonal que facilita la visualización del perfil de la distribución de datos.

Si el histograma es de frecuencias absolutas o relativas, la línea poligonal se llama polígono de frecuencias.

Si el histograma es de frecuencias absolutas acumuladas o relativas acumuladas, se llama ojiva.



Además de los gráficos estudiados, existen otros tipos de gráficos.

Cartograma	Pirámide de población
Es un mapa coloreado por zonas, según los valores que toma la variable. Va acompañado de un código que indica el significado de cada color. El siguiente cartograma muestra el PIB (producto interior bruto) por habitante en España (2007).	Es la combinación de dos histogramas horizontales con un eje vertical común que contiene los intervalos de clase. En uno de ellos, se representan los datos correspondientes a la distribución por edades del sexo masculino; y en el otro, los del sexo femenino.

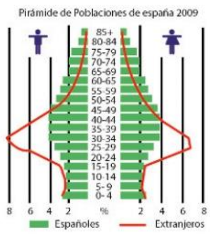


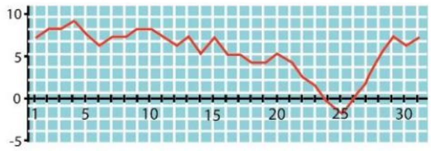
Gráfico evolutivo

Lo utilizamos para representar la evolución en el tiempo de una determinada variable estadística. Los valores de la variable cambian a lo largo del tiempo y constituyen lo que denominamos una *serie temporal*.

Para construir un gráfico evolutivo, seguimos estos pasos:

— Trazamos unos ejes de coordenadas.

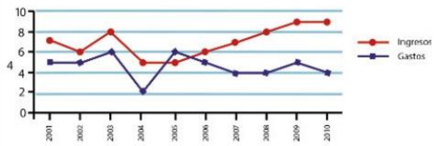
— El eje de abscisas se toma como eje temporal, es decir, sobre él representamos los diferentes períodos. Sobre el eje de ordenadas, representamos los distintos valores de la variable.



— Representamos mediante puntos los pares formados por cada período y el valor correspondiente de la variable, y los unimos mediante una línea poligonal.

Observa que el gráfico evolutivo muestra la variación de las temperaturas de una población a lo largo de un mes.

Gráfico comparativo



Consiste en la superposición de dos o más gráficos en uno solo, de manera que puedan compararse con mayor facilidad que si se hubieran representado por separado.

La figura representa un gráfico comparativo que consiste en la superposición de dos gráficos evolutivos que describen los ingresos y los gastos anuales de una empresa, en millones de euros, entre 2001 y 2010.

Trabajo individual

1. Observe el cartograma de la página anterior y explique cuál es la distribución del PIB por habitante en el territorio español.
2. A partir del gráfico comparativo representado en la pagina anterior, construya un gráfico evolutivo que represente las ganancias de la empresa a lo largo del tiempo. ¿Cuáles han sido el mejor y el peor momento de la empresa en este período?
3. Describa cada tipo de gráfico estadístico.
   a. Polígono de frecuencias
   b. Pictograma
   c. Cartograma
   d. Gráfico comparativo
4. Dibuje un catograma

Tablas y gráficos con computadora

Una hoja de cálculo puede servir para confeccionar distintos tipos de gráficos estadísticos.

Veamos, por ejemplo, el caso de la estadística de los jugadores de un equipo de baloncesto en lo relativo a puntos conseguidos y minutos jugados.

En primer lugar, debemos introducir en las celdas de la hoja de cálculo, en forma de tabla, la información recogida en el estudio.

A continuación, en el menú *Insertar* elegimos la opción *Gráficos*. A lo largo de cuatro pasos podemos definir las distintas características del gráfico.

	A	B	C
1	Jugador	Puntos	Minutos
2	Juan	10	15
3	Nacho	9	27
4	Omar	3	24
5	Diego	26	24
6	David	14	32
7	Álvaro	8	3
8	Vicente	10	28
9	Ricardo	1	21
10	Pedro	7	26

- En el paso 1 seleccionamos el tipo de gráfico: columnas, líneas, sectores...
- En el paso 2, la información que hemos introducido en las columnas, las series de datos y sus títulos, se relacionan con la posición que debe tener en la gráfica.

- En el paso 3 definimos: las leyendas del título y de los ejes, los tipos de líneas de división, los rótulos de datos (valores y porcentajes) y la tabla de datos.

Parámetros estadísticos

En la prensa, podemos leer titulares como estos:

- Cada ecuatoriano produce en promedio 197 kg de basura al año.
- El número medio de hijos por hogar en Ecuador es 1,6.

Estos valores reflejan las características de una serie de datos y los denominamos *parámetros estadísticos*.

Libros leídos (x_i)	Frecuencia absoluta (n_i)
$x_1 = 0$	$n_1 = 1$
$x_2 = 1$	$n_2 = 3$
$x_3 = 2$	$n_3 = 6$
$x_4 = 3$	$n_4 = 8$
$x_5 = 4$	$n_5 = 6$
$x_6 = 5$	$n_6 = 5$
$x_7 = 6$	$n_7 = 3$
	$N = 32$

Para calcular la media aritmética de un conjunto de datos cuyos valores se repiten, podemos utilizar las frecuencias absolutas (n_i) de cada valor de la variable (x_i). Así, para los datos de la tabla 4:

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 3}{32} = 3{,}3$$

Si representamos por x_1, x_2, ..., xk los diferentes valores de la variable, por n_1, n_2, ..., n_k sus respectivas frecuencias absolutas y por N el número de datos, expresamos la media aritmética:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{N}$$

Parámetros de centralización

os parámetros de centralización son valores representativos de un conjunto de datos.

Existen diferentes parámetros de centralización. Los más conocidos son: la moda, la media aritmética y la mediana.

Media aritmética

Cuando trabajamos con variables estadísticas cuantitativas, podemos tomar como valor representativo de la serie de datos el que resultaría de repartir la suma de todos los datos en partes iguales entre el número total de ellos.

A la media aritmética de una serie de datos la obtenemos sumando todos los datos y dividiendo entre el número total de ellos. La representamos por x.

Las calculadoras científicas suelen estar preparadas para efectuar algunos cálculos estadísticos. En general, no proporcionan el valor de todos los parámetros estadísticos que has estudiado en esta unidad, pero sí el de los dos de uso más frecuente: la media aritmética y la desviación típica.

A continuación, te explicamos el funcionamiento de una calculadora estándar, aunque conviene que revises el manual de instrucciones de la tuya, porque no todas funcionan de la misma forma.

Introducción de datos

- Ponemos la calculadora en modo estadístico pulsando la tecla MODE y seleccionando el modo estadístico (SD).
- Borramos de la memoria cálculos anteriores.
- Introducimos los datos, uno a continuación de otro.

  x_1 M+ x_2 M+ ...x_n M+

  Si conocemos la frecuencia absoluta de cada x_i, podemos proceder más rápidamente pulsando

  x_1 , n_1 M+ x_2 , n_2 M+ ... x_k , n_k M+

Obtención de parámetros estadísticos

- Para la media aritmética o la desviación típica, presionamos y escogemos la opción correspondiente de la pantalla:

- También es posible obtener otros datos como el número de datos introducidos, la suma de todos los datos o la suma de los cuadrados de todos los datos pulsando y escogiendo la opción correspondiente:

Ejemplo 2

Las edades, en años, de los participantes en un campeonato de ajedrez son estas: 16, 21, 45, 36, 30, 18, 29, 27, 18, 47, 22 y 40. Calculemos la media aritmética de estos datos.

Para hallar la media aritmética, sumamos la edad de cada uno de los participantes y dividimos el resultado entre el número de participantes.

$$\overline{x} = \frac{16 + 21 + 45 + 36 + 30 + 18 + 29 + 27 + 18 + 47 + 22 + 40}{12} = 29{,}1$$

La edad media es de 29,1 años.

Un valor importante en cualquier serie de datos, tanto si corresponde a una variable cualitativa como cuantitativa, es el que más veces se repite dentro de la serie. Este valor de la variable recibe el nombre de *moda*.

La moda es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta.

Puede ocurrir que existan dos o más valores de la variable con frecuencia absoluta máxima. En este caso decimos que la distribución de datos es bimodal (dos modas), trimodal (tres modas)... o, en general, multimodal (varias modas).

Mediana

En el caso de variables estadísticas cuantitativas, podemos ordenar los datos de una serie de menor a mayor.

Observemos estos datos, ya ordenados, de la variable estadística denominada *horas diarias dedicadas al estudio*.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2,
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3

Vemos que el 1 ocupa el lugar central. Diremos que 1 es la mediana. Pero ¿qué ocurre si el número de datos es par? Observémoslo en este ejemplo.

15, 23, 24, 26 , 26 , 28 , 30, 36, 36, 40

Ahora hay dos datos centrales, 26 y 28. Diremos que la mediana es la media aritmética de estos dos datos.

$$\frac{26 + 28}{2} = 27$$

Al ordenar de menor a mayor los datos obtenidos en un estudio estadístico, la mediana es:

- El dato que ocupa el lugar central si el número de datos es impar.
- La media aritmética de los dos datos centrales si el número de datos es par.

Ejemplo 3

Determinemos la moda y la mediana de los datos de esta serie estadística: 5, 7, 4,12, 8, 12, 14, 10, 7, 13, 6, 6, 12, 9, 11, 4.

- Ordenamos los datos: 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 14.

La moda es el valor con mayor frecuencia absoluta: 12.

- El número de datos es par; entonces, la mediana será la media aritmética de los dos valores centrales:

$$\frac{8 + 9}{2} = 8{,}5$$

La mediana es 8,5.

Trabajo individual

1. Determine la moda y la mediana de estos datos estadísticos: 5, 6, 7, 10, 11, 6, 8, 6, 4, 7, 6, 3, 8.
2. Determine media, mediana y moda de la serie estadística: 3, 5, 2, 3, 4, 3, 3, 6, 5, 2, 3, 5, 6, 6.

1.3. Estadística usando programas informáticos

D.C.D. M.4.3.3. Representar de manera gráfica, con el uso de la tecnología, las frecuencias: histograma o gráfico con barras (polígono de frecuencias), gráfico de frecuencias acumuladas (ojiva), diagrama circular, en función de analizar datos mejorando la capacidad de compresión de la información presentada de forma gráfica por los medios de comunicación.

Una hoja de cálculo es un programa que presenta en pantalla una cuadrícula de casillas o celdas identificadas con una letra que indica la columna y un número que indica la fila donde se encuentra.

Una fórmula en la hoja de cálculo

Calculemos el total de la factura de un supermercado. Sabemos que los artículos de clase A tienen un IVA del 4 %; los de clase B, del 7 %; y los de clase C, del 16 %.

	A	B	C
1	Ejemplo supermercado		
2		Importe sin IVA	
3	Tipo A	11,88	
4	Tipo B	51,79	
5	Tipo C	19,52	
6	Cálculo del importe total con IVA		
7		=B3*1,04+B4*1,07+B5*1,16	
8			
9			
10			
11			

- En las celdas adecuadas escribimos el texto que servirá de información. Con lo que, en las celdas *B3*, *B4* y *B5*, escribimos, respectivamente, tres números que representan los importes sin IVA de los artículos de las clases A, B y C.
- En este caso, en la celda *B7*, escribimos la fórmula que proporcionará el importe total, sabiendo que, en una hoja de cálculo, escribimos una fórmula empezando con el signo igual (=) y que el símbolo de producto es *.

Recordemos que, para añadir a una cantidad el 4 %, el 7 % o el 16 %, hay que multiplicar, respectivamente, por 1,04, 1,07 y 1,16, luego, la fórmula es:

= B3*1,04+B4*1,07+B5*1,16

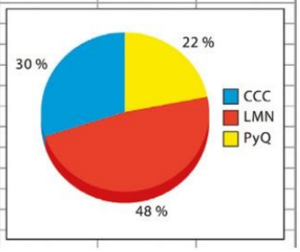
Veremos que, al digitar la fórmula, esta «se esconde» y aparece el resultado. Ahora bien, si hacemos doble clic en la celda correspondiente, podremos ver la fórmula como en la figura y corregirla si es necesario.

- Comprobemos que, para el cálculo, no se han usado «los números», sino la identificación de las celdas que los contienen, puesto que, si modificamos los valores de las celdas, el programa actualiza automáticamente el resultado.

Diagrama de sectores

Elaboremos el diagrama de sectores para representar gráficamente los resultados de unas elecciones en las que participaban tres partidos, CCC, LMN y PyQ, que han obtenido, respectivamente, 22 415, 36 143 y 16 222 votos.

	A	B	C	D
1	Partido	Número de votos		
2	CCC	22415		
3	LMN	36143		
4	PyQ	16222		



- Escribimos la tabla de datos correspondiente en la hoja de cálculo y, a continuación, seleccionamos las celdas donde está la tabla que incluye la fila de rótulos.
- Hacemos clic sobre el ícono de la barra de herramientas para realizar gráficos estadísticos y, del menú que aparece, escogemos como tipo de gráfico *Círculo*. Al hacer clic en el botón de *Finalizar* aparecerá el correspondiente diagrama de sectores que podremos desplazar donde